HISTORIA MATHEMATICA **21** (1994), 420–452

Considerazioni di Giovanni Rizzetti sul calcolo delle probabilità e sul teorema di Jakob Bernoulli

A. BELCASTRO, G. FENAROLI, E A. C. GARIBALDI

Dipartimento di Matematica, Via Leon Battista Alberti, 4, 16132 Genova, Italia

This paper focuses on the writings on probability by Giovanni Rizzetti (1675–1751), who was a member of the group of Venetian scholars around Count Jacopo Riccati (1676–1754). We deal with his approach to probability and, more particularly, with his argumentation on Bernoulli's theorem. The research develops Rizzetti's reasonings as contained in his printed works (1724–1729) as well as in certain key manuscripts. The texts of the latter may be found in the appendix. The statements of Rizzetti seem very interesting; they are situated between the empirical law of chance and the law of large numbers. © 1994 Academic Press, Inc.

Diese Arbeit gehört zu einer Nachforschung über die Schriftstücke über Wahrscheinlichkeit von Giovanni Rizzetti (1675–1751), der ein Mitglied der Gruppe venetischer Forscher unter dem Grafen Jacopo Riccati (1676–1754) war. Wir studieren seine eigene Annäherung an Wahrscheinlichkeiten und spezieller seine Argumentation über Bernoullis Lehrsatz. Unsere Nachforschung entwickelt sich anhand Rizzettis Erörterungen, die in seinen gedruckten Arbeiten (1724–1729) und in manchen nachfolgenden Manuskripten, desen Text wir in einem Anhang beifügen enthalten sind. Die Darlegungen Rizzettis scheinen sehr interessant; sie bewegen sich zwischen dem empirischen Zufallsgesetz und den Gesetz der großen Zahlen. © 1994 Academic Press, Inc.

Cet article représente un commencement des recherches sur les écrits de Giovanni Rizzetti (1675–1751) qui appartient au groupe des scientifiques vénitiens autour de Jacopo Riccati (1676–1754). On considère l'approche de Rizzetti à la probabilité et plus particulièrement ses arguments à propos du théorème de Bernoulli. La recherche comprend ce que Rizzetti a dit, soit dans les oeuvres qu'il a publiées (1725–1729), soit dans quelques manuscrits. Nous présentons les textes de ces derniers dans une appendice. Les énoncés de Rizzetti apparaissent très interessants; ils se situent entre la loi du hasard et la loi des grands nombres. © 1994 Academic Press, Inc.

MSC 1991 subject classifications: 01A50, 60-03.
KEY WORDS: history of probability, Bernoulli's theorem, limit theorems, stochastic processes

1. INTRODUZIONE

Questo lavoro fa parte dello studio da noi avviato sugli scritti di probabilità di Giovanni Rizzetti (Treviso, 1675–1751) e costituisce l'ampiamento di una nota presentata ad un convegno SILFS [1].

G. Rizzetti è un autore non molto noto che fece parte del gruppo di studiosi veneti raccolti intorno al Conte Jacopo Riccati, di cui era coetaneo ed amico [16; 14]. Per notizie e fonti bio-bibliografiche relative alla sua vita ed alle sue ricerche occorre far capo a lavori di studiosi di storia veneta che ricordano la sua completa formazione scientifica, dalla matematica alla musica e dalla fisica all'architettura, di cui tra l'altro egli si servì nella costruzione di una sua villa nei dintorni di

0315-0860/94 $6.00

Castelfranco Veneto [5; 11; 22]. Nella storia della scienza Rizzetti è conosciuto principalmente come studioso di ottica, per aver pubblicato vari lavori e soprattutto per aver avuto una disputa con alcuni scienziati inglesi in merito alle esperienze newtoniane sulla rifrazione [7, 202–207]. La sua attività di probabilista è soprattutto conosciuta attraverso una breve nota, peraltro assai critica, contenuta in appendice della classica storia di Todhunter [20, 614–615].

Tale posizione appare però riduttiva. In realtà Rizzetti studiava attentamente il calcolo delle probabilità negli anni '20 del secolo XVIII dimostrandosi perfettamente al corrente dei lavori appena usciti in argomento: in primo luogo l'*Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli [3] ed i saggi di Pierre Rémond de Montmort [13] e di Abraham de Moivre [9], tutte opere che egli cita criticamente. Inoltre nel 1724 Rizzetti ebbe a Venezia una discussione polemica su argomenti probabilistici con il giovane Daniel Bernoulli, che allora si trovava in Italia [15]. A tale disputa è dedicata la prima parte delle *Exercitationes quaedam mathematicae* uscite a Venezia nello stesso 1724, prima opera a stampa di Daniel [2]. Nell'anno successivo Rizzetti pubblicò, sempre a Venezia, il suo libro *Ludorum scientia publico beneficio illustrata* [18], in cui tra l'altro fornisce la propria versione della discussione avuta con Daniel Bernoulli l'anno precedente. Il testo di Rizzetti fu stampato pochi anni dopo, nel 1729, nel Tomo IX dei Supplementa degli *Acta eruditorum Lipsiensia* [19], con alcune modifiche di dettaglio.

Questo libro, pur tornando sulla disputa con Daniel Bernoulli, ha come scopo principale l'applicazione ai giochi dei risultati della quarta parte dell'*Ars conjectandi,* attraverso una rilettura ed interpretazione sua propria del celebre teorema che Jakob Bernoulli aveva dimostrato. Alla trattazione di questo tema è dedicato esplicitamente il presente lavoro, mentre della disputa ci riserviamo di parlare in altra occasione.

Lo scritto di Rizzetti, ancorché fatto conoscere dagli *Acta eruditorum* non sembra aver avuto eco apprezzabile. Peraltro non va dimenticato che esso è situato in un periodo in cui erano ancora pochi coloro che si dedicavano alla probabilità. In Italia abbiamo trovato traccia delle idee di Rizzetti nell'opera *Dei principi e dei metodi della fisica,* composta da Jacopo Riccati negli ultimi anni della sua vita e pubblicata postuma nel volume secondo delle sue opere, uscito nel 1762 [17]. Di ciò daremo a suo tempo più dettagliata notizia.

Tuttavia Rizzetti continuò certamente ad occuparsi di probabilità anche dopo il 1725. La prof. Maria Chiara Bazan di Castelfranco Veneto è autrice di una tesina, di 11 pagine manoscritte, dal titolo *La figura di Giovanni Rizzetti matematico (1675–1751)*, discussa il 7 novembre 1980 presso l'Università degli Studi di Padova per il conseguimento della laurea in matematica, sotto la guida del prof. Maurizio Emaldi della stessa Università. In essa, annunciava l'esistenza di interessanti carte manoscritte a contenuto scientifico dello studioso veneto, presenti nell'Archivio parrocchiale di Castelfranco Veneto. Dobbiamo alla cortesia dei suddetti professori la segnalazione di manoscritti di Rizzetti, concernenti la probabilità, due dei quali (autografi in lingua italiana), particolarmente indicativi della sua linea di pensiero in relazione al teorema di Bernoulli, riportiamo integralmente in appendice: una prima breve nota intitolata *Dimostrazione del teorema bernoulliano* (Appendice A.2) ed una seconda *Sopra li giochi detti di fortuna* (Appendice A.3). In particolare, questo secondo scritto, redatto successivamente all'opera a stampa, e forse in seguito ad obiezioni, contiene un abbozzo di nuova stesura del risultato che è alla base delle conclusioni del libro di Rizzetti.

Complessivamente non ci sembra improprio attribuire al nostro autore l'aver operato una qualche "deformazione" del teorema di Bernoulli. Ciò avviene esplicitamente nel lavoro a stampa, per cui parleremo di *primo ragionamento* di Rizzetti; di tale ragionamento tratta anche il manoscritto *Dimostrazione del teorema bernoulliano* (Appendice A.2) che conferma e chiarisce alcuni particolari del pensiero di Rizzetti già contenuti nell'opera a stampa. Nella successiva riflessione manoscritta *Sopra li giochi detti di fortuna* (Appendice A.3) troviamo una linea di pensiero più vicina all'ottica di Bernoulli, ma pur sempre assai differente, che denomineremo *secondo ragionamento.*

La descrizione sommaria dei vari enunciati e del tema della ricerca di Rizzetti è contenuta nel seguente § 2. Ad essa segue l'esposizione approfondita dei suoi ragionamenti (§§ 3 e 4) ed un confronto critico dei procedimenti rizzettiani, ancorché manchevoli da vari punti di vista, con l'impostazione di Bernoulli (§5). In questa nota presentiamo al lettore contemporaneo gli scritti di Rizzetti ed una interpretazione dei suoi ragionamenti, utilizzando il linguaggio attuale. A tale aggiornamento del linguaggio ci riferiremo quando diremo che intendiamo "parafrasare" enunciati originali di Rizzetti. In appendice oltre ai due citati manoscritti è riportata anche, per comodità del lettore, una nostra versione in lingua italiana dei brani, da noi ritenuti essenziali per la comprensione del punto di vista dell'autore sul teorema di Bernoulli, contenuti nel lavoro pubblicato in latino (Appendice A.1).

L'opera di Rizzetti ci appare significativa per vari motivi. Un primo motivo di interesse ci sembra risiedere nel diverso atteggiamento rispetto al "caso" che presentano Rizzetti e Bernoulli (§5). Mentre per Bernoulli la casualità di una successione di prove è garantita dal processo fisico che è stato attivato per ottenerle, Rizzetti, a nostro giudizio, decide invece della casualità osservando i risultati delle prove e ritiene che essi possano considerarsi casuali solo se sono verificate certe condizioni (§5). L'assunzione che Rizzetti chiama *axioma primum,* di formulazione assai vaga, viene utilizzata per ammettere che il giudizio sull'esistenza o meno di casualità dipenda dai risultati, ovvero che la casualità possa, almeno in via di principio, riscontrarsi nella "realtà" delle cose. Si possono quindi avere risultati che sono "casuali" secondo Bernoulli ma non secondo Rizzetti. È possibile, anzi ci sembra plausibile, che questa differenza abbia condotto il *primo ragionamento* di Rizzetti verso una legge empirica del caso invece che verso una legge dei grandi numeri. Diciamo questo usando la moderna terminologia dichiarando tuttavia che è difficile comprendere se egli avesse valutato una qualche differenza fra le due formulazioni o comunque se esse gli fossero presenti come enunciati distinti.

Ulteriore motivo di interesse, per il lettore di oggi, è che il tentativo di comprendere il significato dell'Assioma di Rizzetti suggerisce in modo naturale delle assonanze con alcune idee attualmente presenti in certi ambiti probabilistici, quale, ad esempio, il concetto di casualità di una sequenza di numeri oggi utilizzato in informatica. A queste considerazioni, di carattere epistemologico, è dedicato il § 6.

2. IL TEOREMA DI BERNOULLI E GLI ENUNCIATI DI RIZZETTI

Il trattato a stampa di Rizzetti, intitolato *Ludorum scientia,* è dedicato al Cardinale de Polignac, un personaggio che aveva interessi scientifici in particolare, come Rizzetti, nel campo dell'ottica. È composto di due parti, precedute dall'*Argumentum* che riassume il contenuto e delinea lo scopo del libro, e che non è stato riprodotto nella versione che Rizzetti pubblicò nel 1729 negli *Acta eruditorum.* Mentre la *Pars secunda* tratta della polemica con Daniel Bernoulli, di cui non ci interesseremo qui, la *Pars prima* è dedicata a mostrare come "La fortuna nei giochi non si comporta come pensa la gente" poiché "nei giochi di fortuna l'arte di congetturare conduce a determinare, con un calcolo che non lascia dubbi, che cosa infallibilmente i giocatori possono guadagnare o perdere in un lungo esercizio del gioco" [18, Argumentum].

Nel'Europa del secolo XVIII il gioco era una componente importante della vita sociale, soprattutto nelle classi più elevate. Si giocava ogni sera nelle corti e nei salotti; i giochi erano piuttosto simili in ogni parte d'Europa. Molto diffusi tra i giochi di carte erano il Faraone e la Bassetta (variante del precedente) ai quali i primi studiosi di probabilità applicarono il calcolo delle sorti. Dopo Sauveur nel '600, troviamo infatti tabelle per tali giochi nell'*Ars conjectandi* e nell'*Essai d'analyse sur les jeux de hazards* di Montmort. Anche Rizzetti sviluppa in varie sedi calcoli simili ma, ciò che più importa, vuole applicare il teorema di Bernoulli per convincere i giocatori che, continuando a giocare, la situazione si avvicina sempre più al calcolo teorico delle sorti, da cui si può ricavare l'eventuale vantaggio di un giocatore sull'altro. Schematicamente si può pensare a due persone con ruoli diversi, il banchiere (o mazziere) che svolge a due a due le carte del mazzo (composto di 4 semi di 13 carte ciascuno) ed il giocatore (colui che punta sull'uscita di una carta). Nel concreto, i giocatori potevano essere molti e puntare su carte diverse o anche intervenire con una puntata a gioco iniziato ma è sufficiente rifarsi allo schema più semplice per comprendere il senso del problema di fondo. Posto che le regole accettate diano effettivamente un certo vantaggio al banchiere (vantaggio reso esplicito dal calcolo delle sorti, peraltro niente affatto banale), i giocatori continuano ad attendere il colpo di fortuna e non si rendono conto che, continuando a giocare, finiranno con perdere nella misura data dal calcolo.

Nella *Pars prima* del trattato *Ludorum scientia* Rizzetti prende le mosse dal libro di Jakob Bernoulli, di cui fa un grande elogio, e ne riprende il teorema fondamentale citandolo con le stesse parole dell'*Ars conjectandi* [3, 226; 21, 249–250]. Si occupa in particolare di quella parte del teorema che riguarda l'andamento della probabilità al crescere all'infinito del numero delle prove; non sembra invece interessato alle maggiorazioni di tale probabilità per un numero finito di prove. Una parafrasi in linguaggio moderno di questa parte del teorema potrebbe essere la seguente: se si fanno n ripetizioni indipendenti e si indicano con $k_A(n)$ e $k_B(n)$ rispettivamente il numero di volte in cui si verificano due eventi A e B di probabilità costanti p_A e p_B, per ogni ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\left\{\frac{p_A}{p_B} - \varepsilon_1 < \frac{k_A(n)}{k_B(n)} < \frac{p_A}{p_B} + \varepsilon_2\right\}}{P\left\{\left(\frac{k_A(n)}{k_B(n)} \le \frac{p_A}{p_B} - \varepsilon_1\right) \cup \left(\frac{k_A(n)}{k_B(n)} \ge \frac{p_A}{p_B} + \varepsilon_2\right)\right\}} = +\infty.$$

Rizzetti passa poi, nel testo a stampa, ad indicare il suo punto di vista, presentando un *Teorema* (*primum* nell'ordine della trattazione; vedi Appendice A.1, 217), che si riferisce al caso di estrazioni, con rimpiazzamento ogni volta (questo è il modo descritto da Rizzetti nella sua precedente citazione del teorema di Bernoulli), di due palle A, B per cui si ha $p_A = p_B = p$ $(\neq 0)$. A preventivo chiarimento dei termini usati nell'enunciato, Rizzetti ha posto infatti due definizioni. La prima spiega che in riferimento ai giochi di cui intende trattare, i casi di cui parlerà rappresentano eventi ''aeque proclives'':

> I casi che accadono possono accadere con eguale o diversa facilità; poiché però stiamo parlando di giochi, che sono istituiti con casi forniti di eguale proclività, con il nome di casi si devono intendere quelli i cui accadimenti sono egualmente proclivi. [19, 217]

La seconda definizione introduce il termine ''adæquatio'' (adequazione o adeguaglianza):

> Alla maniera di Diofanto chiamo adeguaglianza quella specie di eguaglianza in cui due quantità si superano l'una l'altra a vicenda in modo che la loro differenza confrontata con una qualsiasi delle due risulti inassegnabile. [19, 217]

Con questo termine Rizzetti, richiamandosi al modo di Diofanto, intende che le due quantità C_n e D_n che si adeguagliano sono tali da rendere i due rapporti $|C_n - D_n|/D_n$ e $|C_n - D_n|/C_n$ ''inassegnabili,'' cioè arbitrariamente piccoli. Ciò può essere parafrasato dicendo che $\lim_{n\to\infty} |C_n - D_n|/D_n = \lim_{n\to\infty} |C_n - D_n|/C_n = 0$ ovvero che $\lim_{n\to\infty} C_n/D_n = \lim_{n\to\infty} D_n/C_n = 1$ (con $C_n, D_n > 0$). Vedremo che, di fatto, Rizzetti utilizza l'adequazione proprio nel senso di una sua idea (certamente intuitiva) di limite.

Rizzetti deduce dal suo teorema diversi corollari e lo applica poi alla caratterizzazione dei giochi ''equi'' che definisce come quelli in cui, quando i casi sono accaduti in quella proporzione in cui sono possibili, entrambi i giocatori escono senza né guadagno né danno. Questo suggerisce che l'ottica dell'autore é quella in cui attraverso una serie di giocate (assimilate alle estrazioni con rimpiazzamento) si giunge ad ottenere complessivamente il risultato predetto dal calcolo delle sorti. Ciò realizza effettivamente quanto promesso nell'introduzione: il calcolo predice esattamente, sia pure in un tempo lungo, cioè continuando a giocare, il rapporto fra il numero di vittorie ed il numero di sconfitte del giocatore; allora, tenuto conto delle poste in gioco, si può prevedere la situazione di equità (o di vantaggio e svantaggio) che si verifica fra i giocatori.

Nel manoscritto *Sopra li giochi detti di fortuna* troviamo un enunciato differente, rispetto a quello dell'opera a stampa, che è il seguente:

> Siano molti Casi possibili, tutti d'un'istessa facilità, ma però alcuni d'una spezie, et altri d'un'altra: se di questi ne succede un gran numero, u'è una morale certezza, che li Casi successi siano per essere esattamente, ò prossimam.[te] frà loro nella medesima proporzione, nella quale erano li possibili: Siano per esempio in un'urna due palle a,b, ogn'una egualm:[te] facile ad essere estratta: In ogni estrazione se ne caui una, e doppo l'estrazione si rimetta: Io dico, che repplicate l'estrazioni in un gran numero, u'è una morale certezza, che le palle estratte siano per essere frà loro nella medesima proporzione d'egualità (ò esatta ò prossima), che aueano le palle da estrarsi. [Appendice A.3,1; la sottolineatura è nell'originale]

Il contesto mostra che Rizzetti, forse per rispondere ad obiezioni ricevute, intende per così dire correggere o precisare il teorema enunciato nel suo libro, fornendo anche un abbozzo di dimostrazione fondata, come vedremo, su principi diversi.

Questo è il quadro generale degli enunciati che andremo a discutere e confrontare partitamente nei paragrafi successivi.

3. IL *PRIMO RAGIONAMENTO* DI RIZZETTI

Parafrasiamo il *Theorema primum* [19, 217; Appendice A.1] nel modo seguente:

TEOREMA. *Siano A e B due eventi esclusivi ed egualmente probabili, con probabilità comune p. Siano $k_A(n)$ e $k_B(n)$ le frequenze assolute dei successi degli eventi A e B rispettivamente in n prove indipendenti, in ciascuna delle quali A e B conservano inalterato il comune valore della probabilità p. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|k_A(n) - k_B(n)|}{k_A(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|k_A(n) - k_B(n)|}{k_B(n)} = 0.$$

Il punto nodale su cui Rizzetti fonda la dimostrazione è costituito dal seguente Assioma 1: "Un effetto costante ed immutabile dipende da una causa costante ed immutabile" [19, 217; Appendice A.1]. A partire da esso Rizzetti dimostra il teorema nel modo seguente. Assume di avere un'urna con un certo numero (non precisato) di palle di cui una viene etichettata con simbolo "A" ed una col simbolo "B" e considera estrazioni con reintegrazione, fatte in modo che ogni palla abbia la stessa probabilità di essere estratta di tutte le altre palle presenti. Immagina di fare 1000 estrazioni al giorno delle palle A e B ("Ogni giorno faccio un dato numero di estrazioni delle palle A, B per esempio 1000 . . ." [19, 218; Appendice A.1]). L'autore non lo esplicita ma intende dire che esclude dal conteggio delle 1000 estrazioni quotidiane quelle che non danno come risultato una delle palle A o B; ciò oltre che dal seguito del testo è anche confermato da una descrizione che Riccati fa di una prova sperimentale effettuata da Rizzetti, inerente un gioco con le carte, riportata alla fine di questo paragrafo. Se così è, qui viene già utilizzato in modo sostanziale l'Assioma 1 giacchè si assume come evento certo che, continuando le estrazioni di un dato giorno, debba senz'altro verificarsi almeno una volta, e quindi 1000 volte tempo permettendo, l'uscita di una delle palle A o B. D'altra parte l'assunto è straordinariamente concreto: chi, entrando in un casinò, non si sente certo che il rosso ed il nero usciranno entrambi (e ciascuno molte volte!) nel corso della serata (malgrado la presenza del "numero verde" zero)?

Siano a_i e b_i i numeri di volte in cui compaiono le palle A e B rispettivamente all'i-esimo giorno. Dall'Assioma 1 deduce che non può essere sempre $a_i > b_i$ (né sempre $a_i < b_i$) perché altrimenti "il caso non avrebbe luogo e a questo effetto costante sarebbe da attribuirsi una causa egualmente costante, cioè la maggior facilità di estrarre la palla A, che è contrario all'ipotesi" [19, 218; Appendice A.1].

Siano ora $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ rispettivamente la frequenza (assoluta) di uscita della palla A e della palla B nei primi n giorni, dopo aver fatto quindi un numero totale di estrazioni pari a $N = A_n + B_n = 1000n$. Rizzetti afferma che per lo stesso Assioma 1 non può essere sempre $A_n > B_n$ (né $A_n < B_n$) in quanto "a questo effetto immutabile corrisponderebbe una causa del pari immutabile, che non potrebbe essere nessun'altra che il fatto che la palla A si estrae più facilmente della palla B, che come prima è contrario all'ipotesi" [19, 218; Appendice A.1].

Successivamente considera il sottoinsieme $I = \{n \in \mathbf{N} : (A_n - B_n)(A_{n+1} - B_{n+1}) < 0\}$ dei numeri naturali, in cui la differenza $(A_n - B_n)$ cambia segno: "a certi intervalli vi saranno dei giorni in cui" [19, 219; Appendice A.1]; afferma che, ancora come conseguenza dell'Assioma 1, I è infinito: "Quando ciò sia accaduto una volta, ripetendo il ragionamento si dimostra che avverrà ancora di nuovo e di nuovo la stessa cosa nell'esercizio quotidiano" [19, 218; Appendice A.1].

Osserva poi che $(A_n - B_n)(A_{n+1} - B_{n+1}) < 0$ implica $|A_n - B_n| \leq 1000 - 1 = 999$ e ne deduce che $\lim_{n\in I} |A_n - B_n|/N = \lim_{n\in I} |A_n - B_n|/B_n = \lim_{n\in I} |A_n - B_n|/A_n = 0$, ovvero che $\lim_{n\in I} A_n/B_n = \lim_{n\in I} B_n/A_n = 1$:

> . . . continuando le estrazioni la differenza che sarà tra le estrazioni della palla A e della palla B di nuovo e ancora di nuovo deve al più consistere in un dato numero 1000 tolta una unità [cioè 999]; a certi intervalli vi saranno dei giorni in cui crescendo più e sempre più il numero delle estrazioni, la differenza tra le palle A e B estratte (confrontata con tutte le estrazioni) sarà minore e sempre minore; e in questo caso il rapporto fra le palle estratte A e B sempre più si avvicinerà all'eguaglianza. Ma il numero delle estrazioni può essere aumentato all'infinito; se ciò dunque avviene, la differenza tra le palle A e B estratte (fatto il confronto con tutte le estrazioni) sarà infinitamente piccola; e in questo caso le estrazioni delle palle A e B si adeguaglieranno fra loro. [19, 218–219; Appendice A.1]

e ancora

> . . . continuando le estrazioni ogni giorno vi sono a certi intervalli alcuni giorni nei quali quegli eccessi non possono superare 1000–1; e perciò essi confrontati con tutte le estrazioni delle palle decrescono sempre più ed infine quasi svaniscono. . . . [19, 219; Appendice A.1].

Rizzetti non si sofferma a precisare che $n \to \infty$ implica $A_n, B_n \to \infty$; fatto che si ricava facilmente dall'Assioma 1: se fosse, ad esempio, A_n limitato allora la successione degli a_i dovrebbe essere definitivamente nulla e "a questo effetto costante, dovrebbe corrispondere una causa costante." Ci sembra possibile che l'autore abbia semplicemente sottointeso questo ragionamento, per altro molto consono alla sua impostazione.

Conclude con alcune affermazioni che ci sembra di poter parafrasare come segue: da

$$\lim_{n\in I}\frac{|A_n - B_n|}{B_n} = \lim_{n\in I}\frac{|A_n - B_n|}{A_n} = 0 \quad \text{segue} \quad \lim_{n\in \mathbf{N}}\frac{|A_n - B_n|}{B_n} = \lim_{n\in \mathbf{N}}\frac{|A_n - B_n|}{A_n} = 0$$

cioè il risultato ricavato su I si può estendere all'insieme dei numeri naturali **N**.

L'implicazione precedente non è ovviamente valida in generale; non sembra che Rizzetti si sia reso conto di ciò, in quanto non sottolinea in alcun modo tale punto.

Nel manoscritto intitolato *Dimostrazione del teorema bernoulliano* cerca tuttavia di perfezionare il punto precedente osservando:

> Se così è io ne ricauo che sia per esser finito il numero dell'estrazioni da farsi trà una egualità e l'altra; e perciò concludo che sia per esser finito ancora ogni eccesso, col quale la somma dell'estrazioni d'una Palla è per superare doppo cadauna egualità la somma di quelle dell'altra. [Appendice A.2, 2]

Parafrasando: siano $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ gli (infiniti) elementi di I messi in ordine crescente, allora $|A_j - B_j|$ è limitato se $i_n \leq j \leq i_{n+1}$. Da questo Rizzetti dedurrebbe che $|A_j - B_j|$ è limitato in **N**. Tale conclusione non è sempre vera (per alcune osservazioni al riguardo vedi §6).

Al *Theorema primum*, Rizzetti fa seguire uno scolio e tre corollari [Appendice A.1, 219–220]. Nello scolio Rizzetti osserva che mentre la convergenza da lui dimostrata vale per il rapporto del numero di palle di diverso genere estratte, ciò non accade per la differenza di tali valori, cioè: A_n/B_n tende a 1 ma $A_n - B_n$ non tende a 0 (oggi si preferirebbe dire: k/n tende a p ma k non tende a np). Rizzetti precisa che può capitare che la differenza dopo "un intero anno sia maggiore di quella del primo mese" [19, 219; Appendice A.1]. Nei primi due corollari mostra come si possa estendere il suo teorema fino a pervenire ad una situazione analoga a quella del teorema di Bernoulli, passando da una palla A ed una palla B ad un numero arbitrario di palle A e B. Nel terzo corollario sembra affermare che se $i \in I$ (e quindi la differenza $A_n - B_n$ cambia segno fra l'i-esimo e l'$(i + 1)$-esimo giorno), allora deve esserci una estrazione fra le 1000 dell'$(i + 1)$-esimo giorno tale che il totale delle palle A uscite fino a quel momento sia eguale al totale di palle B; ciò, naturalmente, deve capitare infinite volte: "avverrà anche che le stesse somme in qualche estrazione saranno eguali tra loro" [19, 220; Appendice A.1]. In sostanza Rizzetti sembra affermare che, conteggiando le estrazioni una ad una, trascurando la scansione di 1000 al giorno fin qui considerata, e indicando con A'_t e B'_t il numero totale di palle A e B uscite fino alla t-esima estrazione, il sottoinsieme dei numeri naturali $H = \{t \in \mathbf{N} : A'_t = B'_t\}$ è infinito.

Il ragionamento sviluppato da Rizzetti nella dimostrazione del teorema è in sintonia con un punto di vista espresso da Riccati in un lavoro intitolato *Dei principi e dei metodi della fisica* [17, 174–175]. Egli racconta che un suo "stimatissimo amico" (da identificarsi quasi certamente in Rizzetti) "per accertarsi col fatto, che il caso, quantunque paia a prima vista indocile, soggiace tuttavia alle leggi prescritte dai matematici" ha ripetuto 10,000 prove di un gioco di carte, interessandosi a due eventi A e B incompatibili e giudicati equiprobabili in ogni prova, ottenendo le frequenze $f_A = 5003$ e $f_B = 4997$:

> differenza appena comparabile colla moltitudine de' tagli, e che sarebbe onninamente svanita, se la prova all'infinito si fosse continuata. Così dee necessariamente succedere; avvegnaché posto, che di due probabilità eguali una sempre predominasse a confronto dell'altra; l'effetto stabile ad una costante cagione avrebbe ad attribuirsi: lo che ripugna evidentemente all'indifferenza, la quale richiede giusto l'ipotesi assunta, che ogni caso in particolare faccia di se mostra con pari facilità, né ci sia ragione assegnabile, per cui una parte si ravvisi più dell'altra privilegiata.

In queste ultime affermazioni di Riccati sembra proprio sottinteso qualcosa di simile all'Assioma 1 di Rizzetti.

4. IL *SECONDO RAGIONAMENTO* DI RIZZETTI

Nel manoscritto *Sopra li Giochi detti di fortuna* (Appendice A.3), posteriore al libro stampato e quindi al *primo ragionamento,* Rizzetti si occupa ancora del teorema di Bernoulli in una forma che abbiamo chiamato *secondo ragionamento.* Esso non costituisce una "dimostrazione" autonoma e completa del teorema, ma si limita a rivedere e modificare un punto importante del *primo ragionamento:* quello che riguarda l'insieme I dei giorni in cui $A_n - B_n$ cambia segno, e l'affermazione che esso è costituito da infiniti elementi. Ciò viene realizzato non solo cambiando tecnica dimostrativa ma modificando in modo globale la struttura generale del ragionamento contenuto nell'opera a stampa e, forse, anche l'ottica con cui guardare al caso, avvertendo evidentemente la necessità di compiere un ripensamento complessivo su tale argomento.

Rizzetti non assume più l'Assioma 1 che nella dimostrazione del *Theorema primum* utilizzava per ricavare che l'insieme I dei giorni in cui $A_n - B_n$ cambia segno è infinito. Cerca invece di dimostrare questo fatto, osservando esplicitamente che questa enunciazione riportata nel *primo ragionamento* "non è dedotta dal calcolo delle combinazioni; per affermarla hò messo in opra anco questo" [Appendice A.3, 1]. Egli sviluppa ora un punto di vista secondo cui l'insieme I non è infinito con certezza ma solo con *morale certezza.*

Precisamente considera un'urna che contenga due palle a, b; immagina di fare 2 estrazioni al giorno (con reintegrazione); indicando con A_n e B_n il numero di volte in cui sono state estratte le palle a e b rispettivamente nei primi n giorni, cerca di dimostrare che la probabilità che sia $A_n > B_n$ per ogni n, ovvero $P[\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n > B_n)]$, ha valore zero. Questo dà la *morale certezza* che $A_n - B_n$ cambi segno almeno una volta, quindi infinite volte. In questo *secondo ragionamento,* rispetto alla nozione di casualità, Rizzetti sembra assumere un atteggiamento che si avvicina maggiormente all'ottica di Bernoulli (vedi §5). Questo avvicinamento delle due ottiche, secondo noi, avviene nel senso che, come vedremo, Rizzetti, alla maniera di Bernoulli, per analizzare il comportamento di un certo evento descrive, con il supporto del calcolo combinatorio, tutte le configurazioni dei possibili risultati dell'evento, e poi cerca di confrontarli tra loro in vista della particolare questione cui l'autore si accinge a rispondere. Se la tecnica dimostrativa risulta così simile a quella di Bernoulli, l'ottica rimane ben diversa.

Osserviamo che l'autore utilizza l'idea di *morale certezza* in duplice modo. Aggiornando il linguaggio, possiamo dire che secondo il primo modo, un evento E è "moralmente certo" quando ha probabilità unitaria pur non essendo il suo complementare $\overline{\mathrm{E}}$ l'evento impossibile (è il concetto odierno di evento "quasi certo": $P(\mathrm{E}) = 1$ ma $\overline{\mathrm{E}} \neq \emptyset$, è la quasi certezza delle leggi dei grandi numeri, di certi eventi asintotici della teoria ergodica, etc.). Nel secondo modo un evento E è moralmente certo quando, scelto il livello $\alpha \in [0, 1]$ di morale certezza che si desidera, è $P(\mathrm{E}) \geq 1 - \alpha$. Se $\alpha = 0$ si ricade nel precedente concetto; se $\alpha \geq 0$ la morale certezza di Rizzetti ricorda il "principio della piccola probabilità" in uso in alcuni saggi di significatività: fissato $\alpha \in (0, 1)$ e data un'ipotesi $\mathbf{H}$ e un'evidenza sperimentale S, se $P(S \mid \mathbf{H}) \leq \alpha$ si tratta l'evento condizionato $S \mid \mathbf{H}$ come troppo raro, "moralmente inaccettabile" (per negare, parafrasando, il contrario di "morale certezza" di Rizzetti), quindi $S \mid \mathbf{H}$ è da rigettare ma, poiché non ha senso rigettare i dati sperimentali S, si rigetta l'ipotesi $\mathbf{H}$.

Rizzetti utilizza nel secondo modo la morale certezza quando afferma che sia "certezza morale questa probabilità 999/1000" oppure "Chi uolesse una certezza ancora maggiore, per esempio quella espressa per 9999/10000" [Appendice A.3, 4], ma contemporaneamente la utilizza nel primo modo, perché dà chiaramente ad intendere che il "livello" α può essere scelto arbitrariamente vicino ad 1.

Segnaliamo che Rizzetti parla anche di *certezza assoluta* [Appendice A.3, 3 e 5] attribuendo questa, come facciamo oggi, al solo evento certo, costituito cioè dalla totalità dei casi possibili.

Parafrasiamo ora gli aspetti tecnici del *secondo ragionamento* di Rizzetti. L'autore osserva anzitutto che le due possibili estrazioni di ogni giorno possono dare luogo alle 4 coppie *aa*, *ab*, *ba*, *bb*. Ne deduce che i casi possibili su n giorni sono 4^n. Quindi indica come si potrebbe ottenere il numero dei casi favorevoli all'evento ($A_i > B_i$ per ogni $i \leq n$) mediante un ingegnoso metodo di calcolo: decompone i casi favorevoli dell'n-esimo giorno, in quelli che non contengono la palla b, in quelli che la contengono una volta, in quelli che la contengono 2 volte, . . . , in quelli che la contengono il numero massimo possibile di volte (numero che Rizzetti non esplicita e che vale $n - 1$, come è immediato verificare). Se indichiamo con $f_b(n, k)$ il numero di casi favorevoli del giorno n-esimo che contengono esattamente k presenze della palla b (necessariamente: $0 \leq k \leq n - 1$) possiamo affermare che Rizzetti indica un modo iterativo per calcolare $f_b(n + 1, k)$, dati i valori $f_b(g, t)$ con $0 \leq t \leq k$ e $1 \leq g \leq n$. Fornisce esempi dei calcoli per i primi 4 giorni, e lascia che il lettore proceda da solo nei conteggi successivi.

Descriviamo il procedimento induttivo di Rizzetti, sul numero n dei giorni, che fornisce i valori di $f_b(n, k)$:

$f_b(n, 0) = 1$ qualunque sia il giorno n [Appendice A.3, 2];

$f_b(n, k) = 0$ se $k < 0$ oppure se $k > n - 1$;

$f_b(n + 1, k) = 1 * f_b(n, k - 2) + 2 * f_b(n, k - 1) + 1 * f_b(n, k)$ [Appendice

A.3, 2–3]. Rizzetti non fornisce una formula esplicita per i valori di $f_b(n, k)$; osserva invece che è possibile decomporre f_n (il numero dei casi favorevoli su n giorni) in due parti d_n e c_n, tali che $c_n > 0$ per $n \geq 1$, $d_n > 0$ per $n \geq 2$, $f_n = d_n + c_n$ e $f_{n+1} = 4 * d_n + 3 * c_n$.

In altre parole dimostra che degli $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_b(n, k)$ casi favorevoli ad un certo giorno, una parte (c_n) dà luogo solo a 3 di tali casi: si tratta dei $c_n = f_b(n, n-1)$ casi ai quali non si può aggiungere il caso bb, mentre una seconda parte $d_n = \sum_{k<n-1} f_b(n, k)$ dà luogo a 4 casi favorevoli per il giorno successivo.

Afferma poi che dalle tre relazioni:

$$f_1 = 1; \qquad f_n = d_n + c_n; \qquad f_{n+1} = 4 * d_n + 3 * c_n; \tag{1}$$

segue che la successione $f_n/4^n$ è decrescente:

> In fatti se ne ricaua, che li Casi fauoreuoli al successo proposto crescono ogni giorno meno del quadruplo; Ma per le cose premesse si sà, che tutti li casi possibili crescono ogni giorno esattam:[te] il quadruplo; dunque la parte di tutti questi Casi possibili, che appartiene alli detti casi fauoreuoli (cioè la probabilità del successo proposto) si uà sempre diminuendo di mano in mano, che uà crescendo il numero di giorni n. [Appendice A.3, 3].

Rizzetti non esplicita il ragionamento ma, dalle condizioni (1), segue subito $f_{n+1} < 4f_n$ da cui, dividendo per 4^{n+1}, si ha l'asserto.

Poco oltre afferma, senza giustificare il perché, che $\lim_{n\to\infty} f_n/4^n = 0$ e dichiara che il "grafico" della successione $f_n/4^n$ ha l'asse delle ascisse come asintoto [Appendice A.3, 3–4]. Con un ragionamento molto elegante, si sgancia dal vincolo postosi delle due palle a e b per generalizzare il risultato ad un numero qualsiasi di palle a e di palle b [Appendice A.3, 5–6). Con ciò dimostra che la probabilità $P[\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n > B_n)]$ che sia $A_n > B_n$ per ogni n, ha valore zero, ovvero che vi è probabilità 1 che l'insieme I sia infinito. Come Rizzetti pensasse di completare questo ragionamento per pervenire ad una dimostrazione del teorema di Bernoulli non ci è dato di sapere, in quanto i suoi manoscritti, per lo meno quelli che abbiamo potuto consultare, non ne fanno alcun riferimento. La congettura più naturale è che il *secondo ragionamento* continui come il primo. La conclusione allora sarebbe che ciò che nel *primo ragionamento* avveniva con certezza, ora avviene con morale certezza (ciò che prima era certo, ora ha probabilità 1), passando in tal modo dalla legge empirica del caso alla legge forte dei grandi numeri.

Facciamo seguire qualche breve annotazione tecnica sul *secondo ragionamento* di Rizzetti. Egli ritiene [Appendice A.3, 3–4] che $\lim_{n\to\infty} f_n/4^n = 0$ sia una conseguenza delle condizioni (1). Così non è: se ad es. $f_1 = 1$ e $c_n = 1$ per ogni n, si ottiene $f_{n+1} = 4 * d_n + 3 * c_n = 4 * (f_n - c_n) + 3 * c_n = 4 * f_n - c_n$; iterando i calcoli, si vede facilmente che

$$f_n = 4^{n-1} - 4^{n-2} - 4^{n-3} - \cdots - 1 = 4^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} 4^i$$
$$= 4^{n-1} - \frac{(4^{n-1} - 1)}{3}, \text{ da cui } \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{4^n} = \frac{1}{6}.$$

Tuttavia nel caso studiato da Rizzetti si ha

$$f_b(n, k) = \binom{2n-2}{k} - \binom{2n-2}{k-2} = \frac{n-k}{n}\binom{2n}{k} \tag{2}$$

$$c_n = f_b(n, n-1) = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{n-1}{n+1}\binom{2n-1}{n} \tag{3}$$

$$d_n = \sum_{k=0}^{n-2} f_b(n, k) = \frac{n-1}{2n}\binom{2n}{n-1} = \frac{n-1}{n+1}\binom{2n-1}{n} \tag{4}$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_b(n, k) = d_n + c_n = \frac{n+1}{2n}\binom{2n}{n-1} = \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \tag{5}$$

e allora effettivamente risulta che $\lim_{n\to\infty} f_n/4^n = 0$.

Per dimostrare la (2) (e quindi la (3), la (4) e la (5)) osserviamo che i valori numerici di $f_b(n, k)$ possono essere determinati con le formule iterative

$$f_b(n, k) = 0 \text{ se } k < 0 \text{ oppure se } k > n - 1 \tag{6}$$

$$f_b(n+1, k) = 1 * f_b(n, k-2) + 2 * f_b(n, k-1) + 1 * f_b(n, k) \tag{7}$$

(nelle quali, per comodità di linguaggio, si assume che k vari nell'insieme dei numeri relativi); formule analoghe alla (6) e alla (7) sono utilizzabili per la costruzione del triangolo di Tartaglia dei coefficienti binomiali: esse infatti danno origine alle righe d'ordine pari. Per ogni n, $f_b(n, n) = 0$, mentre il corrispondente coefficiente binomiale vale 1. Il ripercuotersi, nel processo iterativo, di queste differenze è espresso dalla formula

$$f_b(n, k) = \binom{2n-2}{k} - \binom{2n-2}{k-2}. \tag{2}$$

Essa può essere facilmente compresa, ad un livello intuitivo, confrontando i valori dei coefficienti binomiali con quelli di $f_b(n, k)$ calcolati mediante (6) e (7), e dimostrata per induzione su n e k.

5. IL PUNTO DI VISTA DI BERNOULLI E DI RIZZETTI A CONFRONTO

Una differenza fra gli atteggiamenti di Bernoulli e di Rizzetti circa la casualità appare evidente quando si entri nel merito delle loro argomentazioni. Una prima osservazione è che Bernoulli fornisce maggiorazioni "finite" (relative ad n finito) della probabilità $P(|k/n - p| \le \varepsilon)$: è il caso del suo celebre esempio [12, 262–263] in cui, scelto $p = 30/50$ ed $\varepsilon = 1/50$, per $n = 25550$ si ha $P(|k/n - p| \le \varepsilon) > 1000/1001$.

Rizzetti, anche se nel manoscritto intitolato *Dimostrazione del teorema bernoulliano* [Appendice A.2] richiama esplicitamente l'esempio numerico di Bernoulli sopra citato, sembra interessato soprattutto all'andamento all'infinito della probabilità, ovvero al fatto che $P(|k/n - p| \le \varepsilon) \to 0$ per $n \to \infty$, senza occuparsi di fornirne alcuna maggiorazione finita. Questa affermazione sembra confermata dal modo con cui egli conduce i suoi due ragionamenti. Il primo, fondato sull'assunzione dell'Assioma, consente a Rizzetti di affermare che le due grandezze A_n e B_n (vedi §3) sono tali che $A_n, B_n \to \infty$ per $n \to \infty$ (e questo è un punto nodale del suo ragionamento), ma non gli permette di ricavare indicazioni circa la velocità di divergenza. Avendo scelto quest'impostazione concettuale, dato $\varepsilon > 0$, Rizzetti non può determinare un intero n_0 tale che risulti $|A_n - B_n|/A_n < \varepsilon$ e $|A_n - B_n|/B_n < \varepsilon$ per ogni $n > n_0$.

Anche nel *secondo ragionamento* Rizzetti mostra di non essere interessato a considerare le probabilità relative ad un numero finito di prove: il punto nodale di esso è ricavare che $P[\bigcap_{i=1}^{n} (A_i > B_i)] \to 0$ per $n \to \infty$ (per il significato dei simboli, vedi §4). Se fosse stato interessato a fornirne una maggiorazione per n finito, Rizzetti avrebbe cercato di esplicitare una formula che la fornisce (cosa che in realtà è andato molto vicino a fare); di fatto preferisce mostrare che tale probabilità tende a zero con un artificio che (al di là del fatto, qui inessenziale, di essere tecnicamente errato, come si è già dimostrato nel §4) gli rende evidentemente impossibile ottenere una maggiorazione finita.

Nel manoscritto *Sopra li giochi detti di fortuna,* facendo riferimento al grafico della funzione $P(n) = P[\bigcap_{i=1}^{n} (A_i > B_i)]$, Rizzetti afferma esplicitamente "Non importa auere la descrizione di questa Curua in tutta la sua estenzione; basta conoscere il suo andamento, e sapere per le cose premesse, che ella" [Appendice A.3, 4] ha l'asse delle ascisse come asintoto. E nell'esempio che propone di seguito a queste parole ribadisce di poter affermare l'esistenza di n_0, senza determinarne il valore, giacché ancora una volta ha scelto un contesto nel quale non è possibile determinarlo.

Le precedenti considerazioni suggeriscono come Rizzetti facesse esplicito riferimento allo spazio delle infinite sequenze di prove; nell'ambito della probabilità, l'uso di tale spazio diventerà consueto solo dopo i lavori di Poincaré e di Borel.

Una seconda differenza fra le ottiche dei due autori consiste nel fatto che i processi stocastici considerati da Bernoulli e da Rizzetti per provare il *Theorema primum* non sono gli stessi. Bernoulli utilizza un processo stocastico in cui si fa riferimento ad una successione infinita di variabili aleatorie stocasticamente indipendenti egualmente distribuite: questo è il suo modo di pensare ad avvenimenti casuali ed è proprio per poter pensare in questi termini che egli studia le estrazioni con reintegrazione di palle da un'urna. Ritiene che, in natura, questo esperimento verifichi le ipotesi di indipendenza ed equiprobabilità, che pone a base del suo teorema. Per lui, caso significa estrarre da queste urne, nel modo detto. Qualunque risultato si ottenga esso è casuale: la sua casualità è garantita dal processo fisico che è stato attivato per ottenere quel risultato. Il concetto di casualità quale noi abbiamo inteso contenuto nel *primo ragionamento* di Rizzetti, sembra partire dall'osservare i dati e dice che essi sono casuali solo se verificano certe restrizioni. Così mentre Bernoulli considera interna alla sua nozione di casualità l'evento constituito dall'uscita costante di testa in una sequenza (infinita) di lanci di una moneta, per Rizzetti questo evento è incompatibile con la nozione di caso (se si verifica, allora la moneta è truccata), ed è quindi escluso dall'ambito della casualità. Lo stesso capita per tutti quegli eventi che posseggono una regolarità: essi sembrano esclusi dalle considerazioni di Rizzetti, mentre rientrano, come più o meno probabili, nell'ottica di Bernoulli.

Ottiche molto simili a quelle di Rizzetti erano ben diffuse anche nella sua epoca, come risulta ad esempio da un aneddoto, raccontato da Bertrand [4, vii] nella prefazione della sua opera, secondo il quale l'abate Galiani, di fronte alla costanza dei risultati ottenuta ripetendo più volte il lancio di dadi, affermò senza alcun dubbio che gli stessi erano truccati, ovvero che ci doveva pur essere una causa, diversa dal caso, che determinasse questa invariabilità dei risultati.

Ci sembra infine significativo segnalare il fatto che il teorema di Bernoulli, anche come riportato da Rizzetti (§2), e verosimilmente il secondo enunciato di Rizzetti (§2) conducono alle leggi dei grandi numeri; mentre il *Theorema primum* (§2), tanto nell'enunciato quanto nella dimostrazione, sembra più simile alla legge empirica del caso [8]. Schematicamente la situazione è la seguente:

$$\text{Bernoulli: } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k_A(n)}{k_B(n)} - 1\right| < \varepsilon\right\} = 1:$$

legge debole dei grandi numeri;

$$\text{Rizzetti } 1^\circ \text{ ragionamento: } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k_A(n)}{k_B(n)} - 1\right| = 0:$$

legge empirica del caso;

$$\text{Rizzetti } 2^\circ \text{ ragionamento: } P\left\{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k_A(n)}{k_B(n)} - 1\right| = 0\right\} = 1:$$

legge forte dei grandi numeri.

Sembra che Rizzetti nei suoi lavori non percepisca (né tanto meno dichiari esplicitamente) differenze concettuali fra i tre casi sopra indicati: anzi fa più volte riferimento ad essi come se avessero dei significati molto simili; ciò d'altra parte già emerge nel confronto fra gli enunciati originali che abbiamo riportato al §2. In particolare, non sembra che Rizzetti delinei esplicite differenze fra legge debole e legge forte dei grandi numeri. Addirittura l'enunciato da lui dichiarato nel *primo ragionamento* sarebbe più forte di entrambe le leggi dei grandi numeri ed anche di ciò che oggi chiamiamo "legge empirica del caso": quest'ultima, infatti, esprime informalmente una tendenza "limite" della frequenza relativa alla probabilità che non è, come spesso si mette in evidenza, un "limite" nel senso dell'analisi, mentre Rizzetti sembra proprio fare riferimento ad un limite in senso analitico.

6. ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUL "*PRIMO RAGIONAMENTO*" DI RIZZETTI

Abbiamo visto lo schema con cui Rizzetti applica l'Assioma per costruire quella che ritiene, in un primo momento, una prova convincente del suo enunciato. Al di là delle considerazioni critiche sull'uso ed il significato di tale Assioma (che faremo nel presente paragrafo), abbiamo già segnalato che il seguito di passi della sua prova (in particolare l'ultimo e decisivo passo) è infirmato sotto il profilo del rigore. Rizzetti utilizza come vere deduzioni che in generale tali non sono, come anche uno studente oggi sa ed è in grado di verificare nel modo solitamente praticato, attraverso cioè la presentazione di semplici controesempi. Uno di essi è il seguente: dato un qualunque giorno n ed un qualunque possibile valore di A_n assumiamo che per $k = 3n$ giorni immediatamente successivi i 1000 sorteggi quotidiani diano luogo sempre all'uscita della palla A (che quindi esce $3000n$ volte). Tenuto conto delle ovvie diseguaglianze: $A_n - B_n \geq -1000n$ e $A_n \leq 1000n$, si ha $|A_{n+k} - B_{n+k}|/A_{n+k} = |A_n + 3000n - B_n|/(A_n + 3000n) \geq (3000n - 1000n)/(1000n + 3000n) = 1/2$. Ciò mostra come sia possibile scegliere gli a_i e i b_i in modo che i sottoinsiemi dei numeri naturali $I = \{n \in \mathbf{N} : (A_n - B_n)(A_{n+1} - B_{n+1}) < 0\}$, $J_A = \{n \in \mathbf{N} : |A_n - B_n|/A_n > 1/2\}$ e $J_B = \{n \in \mathbf{N} : |A_n - B_n|/B_n > 1/2\}$ siano tutti e tre infiniti; in tal caso entrambi i limiti $\lim_{n\in\mathbf{N}} |A_n - B_n|/A_n$ e $\lim_{n\in\mathbf{N}} |A_n - B_n|/B_n$ non esistono.

Non varrebbe la pena di dilungarsi su questo se non si ponesse, come ci sembra, una questione più sottile e significativa. Siamo nell'ottica di un Assioma che esplicitamente esclude dal dire "casuali" certi eventi troppo regolari (come appunto quelle estrazioni di palle A, B in cui è sempre $A_n > B_n$). Ora i controesempi come quello indicato sono chiaramente legati a successioni di a_i, b_i, e di A_n, B_n, aventi carattere in qualche modo ancora regolare, pur non potendo essere escluse in forza di questa specifica applicazione che Rizzetti fa dell'Assioma. Questo induce a domandarsi: Rizzetti, messo di fronte ad un tale esempio, lo accetterebbe? O non piuttosto lo rifiuterebbe attraverso eventualmente una reiterata o allargata applicazione del suo Assioma?

Da un punto di vista meramente tecnico, egli avrebbe potuto limitarsi a far coincidere l'Assioma con l'unico uso che ne fa. Questa scelta sarebbe risultata più un'espediente necessario per risolvere questioni di tecnica dimostrativa che non l'enunciazione di un principio legato in modo pregnante a una sua specifica nozione di casualità: il problema del significato dell'Assioma non è scavalcabile con trucchetti del genere. D'altra parte esso esprime una visione sul concetto di "caso" che, come accenneremo nel seguito di questo paragrafo, è viva ancora oggi [10].

Accettando l'ottica espressa dall'Assioma, non mancano difficoltà per decidere se la situazione illustrata nell'esempio precedente sia o meno aderente alla concezione di casualità con esso introdotta: si può ammettere che, dato n, l'assunzione di $k = 3000n$ risultati costanti non violi l'Assioma, perché essa riguarda un numero finito di risultati e ci sembra che, in seguito all'interpretazione da noi data di esso nel seguito del presente paragrafo, nessuna assunzione finita possa violarlo, ma, successivamente, di assunzioni simili a questa, per tirare la nostra conclusione, bisogna pur sempre compierne un numero infinito, e qui sorgono delle evidenti difficoltà.

È possibile costruire esempi il cui livello di "regolarità" è molto minore. Uno di essi si basa sullo studio delle limitazioni che devono sussistere fra gli infiniti elementi di un insieme $G = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ quando si imponga che $D_{n_k} = A_{n_k} - B_{n_k} = (-1)^k 100 n_k$ per ogni intero k. Poiché $\lim_{n\in G} |A_n - B_n|/1000n = 1/10$ non può essere $\lim_{n\in \mathbf{N}} |A_n - B_n|/1000n = 0$. Se k è dispari risulta $D_{n_{k+1}} - D_{n_k} = 100(n_{k+1} + n_k)$; ovviamente $|D_{n_{k+1}} - D_{n_k}| \leq 1000(n_{k+1} - n_k)$ (vale l'eguaglianza se le 1000 estrazioni quotidiane, dei giorni dall'$(n_k + 1)$-esimo al n_{k+1}-esimo, avessero tutte come risultato l'uscita di una stessa palla, la A o la B). Allora è necessariamente $n_{k+1} \geq (11/9)\, n_k$ (allo stesso risultato si perviene se k è pari). Ciò significa che fissato un "giorno" n_k di G la scelta del giorno successivo di G può avvenire in infiniti modi (non è detto che siano tutti quelli il cui numero d'ordine è $\geq (11/9)\, n_k$ ma certo se ne possono scegliere infiniti tra di essi). È chiaro come aumentando i valori delle differenze $n_{k+1} - n_k$ sia possibile costruire sequenze di risultati pseudo-casuali per le quali è sempre più difficile riconoscere la regolarità cui essi soggiaciono, e quindi è sempre più difficile stabilire se esse rientrino o meno fra i risultati che giudicheremmo casuali quando si assuma un'ottica analoga a quella dell'Assioma di Rizzetti.

Per inciso, scelti gli A_n e i B_n come sopra, fra due elementi consecutivi n_k, n_{k+1} di G esiste un elemento i dell'insieme I in cui la differenza $A_n - B_n$ cambia segno: $n_k \leq i \leq n_{k+1}$; se $n \in I$, $|A_n - B_n| < 999$, se $n \in G$, $|A_n - B_n| = 100n$: la sequenza $|A_n - B_n|$ è limitata in I ma non è limitata in G e quindi nemmeno in $\mathbf{N}$.

L'incertezza che si presenta quando si vuole stabilire quali sono le sequenze ammesse dall'Assioma come "casuali" e quali no è basata su un fatto semplice: l'Assioma non è una proposizione P, che individuerebbe senza ambiguità l'insieme $\{\mathbf{x} \in \Omega : P(\mathbf{x})\}$ per estensione. Segnaliamo che nemmeno le teorie contemporanee offrono uno strumento per l'individualizione una tale P, anzi sembra che questa situazione corrisponda all'esistenza di una relazione fra noi ed il caso, che si avverte nei contenuti ma non si riesce a inserire in modo adeguato a livello teorico (un'interessante esposizione su questo particolare aspetto si trova nel volume di Ekeland [10]). Vale d'altra parte la pena di notare che, strettamente parlando, Rizzetti dovrebbe rigettare qualunque esempio. Infatti, essendo espresso necessariamente in termini finiti, ogni esempio deve contenere delle regolarità, in contrasto con l'Assioma 1, se lo si interpreta nel suo senso più generale: "casuale è ciò che non ha regolarità."

Per comprendere lo spirito della dimostrazione del *Theorema primum* [19, 217; Appendice A.1] il nostro tentativo si è rivolto inizialmente a comprendere il genere di principi e di evidenze che supportano le considerazioni dell'autore veneto e il modo in cui, secondo Rizzetti, esse conferiscono validità al ragionamento.

A proposito dei presupposti che precedono il teorema, ci sembra di poter affermare che la Defin. 1 [19, 217; Appendice A.1] esplicita un'opinione dell'autore secondo la quale siamo in situazioni a fondamento delle quali vi sono dei casi che assumono tale denominazione quando vengono giudicati equipossibili. La Defin. 2 sembra far riferimento, soprattutto attraverso il termine "inassegnabile" [19, 217; Appendice A.1], a quella che, in linguaggio attuale, chiameremmo una sequenza di coppie di grandezze (A_n, B_n) tali che $(A_n - B_n)/A_n$ e $(A_n - B_n)/B_n$ tendano a zero all'aumentare di n e in questo senso abbiamo usato il simbolo di limite per parafrasare l'enunciato e la dimostrazione del *Theorema primum*.

Più delicato è l'approccio all'Assioma 1. Quello che proponiamo di seguito ci sembra giustificato per due ragioni: da un lato ci pare "naturalmente" compatibile con il pensiero di Rizzetti, dall'altro è suggestivo perché si collega a recenti aspetti della probabilità che, pur se sviluppati in modo del tutto sganciato dai lavori di Rizzetti, indirettamente sanciscono una certa validità ai significati, anche impliciti, in essi contenuti, e ciò indipendentemente dalla correttezza "tecnica" della dimostrazione del *Theorema primum*.

Proponiamo allora una "possibile lettura" dell'Assioma 1, non intendendo assolutamente che sia l'unica, e alcune considerazioni ad essa relative mettendoci nelle condizioni esposte di seguito. Riteniamo, come abbiamo già detto, che il punto nodale consista nel valutare se un esperimento dà esiti "casuali" limitandoci ad analizzare i risultati che si sono ottenuti. Supponiamo di avere i risultati di infinite ripetizioni di un esperimento e di poterci permettere di osservarli tutti, eventualmente anche più volte. Si tratta di un esperimento mentale, non possibile praticamente in quanto fa esplicito riferimento ad infinite ripetizioni. Solo per comodità di espressione supponiamo che i risultati dell'esperimento (le uscite) possano essere non più di due, e siano indicate con i numeri 0 e 1.

Se i risultati sono uniformi (tutti 0 oppure tutti 1) fisseremo la condizione di considerare l'esperimento deterministico e non parleremo, per esso, di casualità. Si potrebbe obiettare a questa posizione che nulla garantisce che se ripetessimo ancora una volta l'esperimento otterremmo lo stesso risultato. Aggiungiamo allora che, in queste situazioni, fare riferimento ad una ripetizione infinita dell'esperimento è un espediente psicologico sotto al quale si cela una proprietà che si vuole attribuire alla successione stessa, e che è bene qui esplicitare: qualunque esito l'esperimento possa avere, questo esito deve essere presente almeno una volta nella successione. In altre parole, ci comportiamo come se l'insieme dei risultati dell'esperimento contenuti nella successione debba necessariamente coincidere con l'insieme dei possibili risultati. Vedremo come l'assunzione sopra indicata sia già per sè stessa equivalente ad un principio che vogliamo successivamente enunciare e che, secondo noi, può esserci utile per "leggere" l'Assioma 1 di Rizzetti. Tuttavia vogliamo proseguire nell'enunciazione di questo principio come se non ci fossimo accorti di averlo già utilizzato. Scegliamo questo comportamento al solo fine di rendere più chiaro quanto vogliamo esporre.

Proseguiamo le riflessioni sui risultati dell'esperimento mentale. Chiaramente non siamo disposti a ritenere che l'esperimento dia risultati casuali nel caso in cui essi siano definitivamente costanti (ma non tutti costanti), e questo perchè in tale situazione si verifica sistematicamente una proprietà P: quella che consiste nel proibire, da un certo punto in poi, la comparsa di un risultato che, in base alle osservazioni precedenti, risulta possibile (in quanto in esse lo si ritrova). Questo fatto nega la casualità, nella misura in cui introduce un aspetto deterministico, che consiste nel rendere dominante una certa legge.

Non occorre considerare proprietà P così forti per negare la casualità: ciò che sembra importante non è tanto che uno dei risultati possibili, da un certo punto in poi diventa impossibile, quanto che esista una proprietà P "possibile" che è definitivamente verificata oppure definitivamente non verificata.

Ciò ci sembra corrispondere al seguente principio: sia P una proposizione che possa risultare vera o falsa se applicata a risultati distinti dell'esperimento, allora se l'esperimento è casuale, P è verificata almeno una volta: se P non è verificata, allora l'esperimento non è casuale in quanto contiene un aspetto deterministico che consiste nell'impossibilità di verificare P.

Il principio sopra enunciato, naturalmente, va qui considerato non come un assioma rigorosamente enunciato di una teoria esatta, quanto come una indicazione di massima, capace di orientarci in un certo ambito di pensiero: ci poniamo di fronte ad esso come di fronte ad un enunciato "imperfetto" che in qualche modo tuttavia traduce qualcosa di sostanziale inerente un possibile modo di pensare al caso.

Tale principio richiede non solo che P sia verificata almeno una volta, bensì che tanto P quanto la sua negazione siano verificate infinite volte; ciò in conformità con l'idea intuitiva secondo la quale se i risultati dell'esperimento sono tali da indurci ad accettare per esso la casualità, allora i risultati devono anche essere tali da indurci ad emettere un giudizio di casualità quando questi siano analizzati a partire da uno qualunque di essi in poi.

Tale principio si deve considerare esteso solo a quelle proprietà per le quali ha senso parlare di infinite loro realizzazioni nella sequenza dei dati sperimentali. Così la proprietà P_1, "la 5° e la 7° osservazione hanno valore 1" non ha le caratteristiche di ripetibilità sopra dette, quindi il suo eventuale non verificarsi non nega il principio detto; mentre l'eventuale non verificarsi della proprietà P_2, "percorrendo i risultati delle estrazioni, si trova una sequenza di diciotto valori consecutivi così costituita: 0, 1, 0, dodici risultati liberi, poi 1, 0, 1," implicherebbe la non casualità.

Per inciso, osserviamo che si possono individuare alcune situazioni attuali inerenti la probabilità in cui si utilizzano concetti analoghi a quelli presenti nel principio sopra indicato e che a noi sembrano in relazione "naturale" con l'Assioma 1. Una di queste, ad esempio, è quella relativa alla *definizione di sequenza di numeri casuali* che si usa in ambito informatico che consiste nell'affermare che una sequenza finita di n numeri è casuale quando il più conveniente algoritmo che possa generare quella sequenza consiste nel memorizzare la sequenza stessa. Il suo significato intuitivo è molto chiaro: se la cosa più rapida che posso fare è memorizzare tutti i numeri della sequenza, vuol dire che non esiste in essi alcuna regolarità che possa essere utilizzata per generare proprio quei numeri [10].

APPENDICE

La presente appendice è composta da tre parti che abbiamo chiamato Appendice A.1, Appendice A.2, e Appendice A.3.

L'Appendice A.1 presenta una nostra traduzione in lingua italiana di parte del testo *Ludorum scientia* pubblicato sugli *Acta eruditorum* [19], che contiene una trattazione di Rizzetti relativa al teorema di Bernoulli (che nel presente lavoro viene indicata nel §3 come "*primo ragionamento*"). In particolare riportiamo dal secondo comma di pag. 216 al terzo comma di pag. 220 (Corollario 3 compreso).

Il testo tradotto da Rizzetti è in caratteri normali, gli scritti in parentesi quadra [. . .] sono nostre integrazioni ad esso.

Le Appendici A.2 e A.3 riportano il testo integrale di due manoscritti di Rizzetti. In Appendice A.2 è riportato il manoscritto intitolato *Dimostrazione del teorema bernoulliano;* in Appendice A.3, quello intitolato *Sopra li giochi detti di fortuna.* Le frasi, le parole o le parti di parola fra parentesi quadre [. . .] sono nostre integrazioni nei punti dei manoscritti in cui vi è una lacerazione; fa eccezione la parola "[corrisponderebbe]," che si trova quasi alla fine della seconda pagina del primo manoscritto ed è in esso mancante. Le frasi e le parole che nei manoscritti sono state scritte e successivamente cancellate, vengono riportate con una linea unita sovrapposta ad esse, se leggibili (anche parzialmente); vengono invece omesse, se risultano completamente illeggibili. Nell'Appendice A.3 le sottolineature sono originali di Rizzetti. Osserviamo ancora che entrambi i testi non portano data alcuna; peraltro il secondo è chiaramente successivo al libro di Rizzetti.

Appendice A.1

p. 216 . . . seguirò le vestigia di Jakob Bernoulli: Per rendere la sua dottrina facile da capire, suppone che in un'urna a sua insaputa siano state riposte diverse palle alcune bianche e altre nere aventi tra loro per esempio rapporto sesquialtero [3 : 2] e tali che ognuna si possa estrarre con uguale facilità; poi volendo esplorare con esperimenti la loro proporzione, estrae una palla dopo l'altra (ogni volta riponendo nell'urna quella che aveva estratto prima di scegliere la successiva e mescolandole tutte insieme) e si propone di osservare quante volte esca la palla bianca e quante volte la nera. Ciò posto, ricerca se questo possa avvenire tante volte che sia dieci, cento, mille volte più probabile (ossia che alla fine risulti moralmente certo) che i numeri delle volte in cui sono estratte le palle bianche e le palle nere abbiano fra loro quel rapporto sesquialtero di cui godono i numeri delle palle o dei casi, piuttosto che un altro qualsiasi rapporto diverso da questo.

p. 217 Affinché poi questo non si intenda in modo differente da quanto si deve, vuole che il rapporto fra i numeri dei casi che cerca di determinare con gli esperimenti non sia considerato preciso e nell'indivisibile [cioè in una grandezza ben determinata] (così infatti certo avverrebbe e sarebbe tanto meno probabile che sia stato trovato il vero rapporto quanto più si prendessero osservazioni) ma vuole un rapporto preso in un certo intervallo cioè racchiuso tra due estremi che però possono essere stabiliti così ristretti quanto uno vorrà.

Questo è certamente un gran ritrovato, infatti abbiamo esplorato la proporzione che conservano tra loro i casi possibili a posteriori come se ci fosse nota a priori. Come poi possa avvenire che quante più osservazioni si prendano, tanto meno sia probabile aver trovato il vero rapporto e di nuovo quante più si prendano osservazioni tanto più sia probabile aver trovato il rapporto compreso tra due estremi che possono stabilirsi così ristretti quanto uno vorrà, lascio ad altri spiegarlo. Frattanto mostro nelle cose seguenti come io concepisco la cosa.

Defin. 1. I casi che accadono possono accadere con eguale o diversa facilità; poiché però stiamo parlando di giochi, che sono istituiti con casi forniti di eguale proclività, con il nome di casi si devono intendere quelli i cui accadimenti sono egualmente proclivi.

Defin. 2. Alla maniera di Diofanto chiamo adeguaglianza quella specie di eguaglianza in cui due quantità si superano l'una l'altra a vicenda in modo che la loro differenza confrontata con una qualsiasi delle due risulti inassegnabile.

Assioma 1. Un effetto costante ed immutabile dipende da una causa costante ed immutabile.

Teorema Primo. *Di tutte la palle collocate come prima si è detto nell'urna ne considero due indicandole con le lettere A, B. Compiendo più estrazioni nel modo detto dico che il rapporto che avranno tra loro le palle estratte A, B si avvicina sempre più all'eguaglianza e finalmente si dispone entro i limiti dell'adeguaglianza.*

Tutti osservano questo nell'esperienza quotidiana e (per usare le parole di Bernoulli) a nessuno sfugge che, per formare un giudizio di un qualche evento, non basta un esperimento o due ma occorre una grande quantità di esperimenti: dal momento che anche
p. 218 il meno intelligente (non so per quale istinto naturale) da sé e senza alcuna precedente istruzione ha scoperto che quanto più siano state fatte osservazioni di questo [evento] tanto meno vi è pericolo di allontanarsi dallo scopo.

Ma per quanto ciò naturalmente sia noto a tutti, tuttavia ne darò una dimostrazione che se, mancando l'apparato dei lemmi, non sarà così penetrante quanto quella di Bernoulli, tuttavia si raccomanda abbastanza per la semplicità.

Ogni giorno faccio un dato numero di estrazioni delle palle A, B per esempio 1000 ed osservo quante volte esce una e quante volte esce l'altra: ciò posto, dico in primo luogo che in alcuni giorni (come porta il caso) si estrarrà la palla A più spesso che la palla B ed in altri giorni la palla B più spesso che la palla A. Infatti se ogni giorno sempre si estraesse una palla più spesso che l'altra, il caso non avrebbe luogo e a questo effetto costante sarebbe da attribuirsi una causa egualmente costante,cioè la maggior facilità di estrarre la palla A, che è contrario all'ipotesi.

Poichè dunque in certi giorni si deve estrarre più spesso una palla e in certi altri più spesso l'altra, raccolgo ogni giorno in due somme quante volte in tutto il tempo delle estrazioni è stata estratta la palla A e quante volte la palla B: ciò posto dico in secondo luogo che la prima somma supererà talvolta la seconda e talvolta sarà superata dalla seconda. Infatti se ogni giorno la somma delle estrazioni della palla A superasse la somma delle estrazioni della palla B, a questo effetto immutabile corrisponderebbe una causa del pari immutabile, che non potrebbe essere nessun'altra che il fatto che la palla A si estrae più facilmente della palla B, che come prima è contrario all'ipotesi.

Poichè perciò la somma delle estrazioni della palla A sarà in certi giorni maggiore e in certi altri minore dell'altra somma delle estrazioni della palla B, avverrà talvolta che la prima somma superi oggi la seconda e domani sia superata dalla seconda. Avverrà perciò che la differenza fra tutte le estrazioni della palla A e quelle della palla B consista al più nel dato numero 1000 (tolta l'unità), cioè nel numero di quelle estrazioni che si fanno in un'unico giorno.

Quando ciò sia accaduto una volta, ripetendo il ragionamento si dimostra che avverrà ancora di nuovo e di nuovo la stessa cosa nell'esercizio quotidiano. Se dunque continuando le estrazioni la differenza che
p. 219 sarà tra le estrazioni della palla A e della palla B di nuovo e ancora di nuovo deve al più consistere in un dato numero 1000 tolta una unità [cioè 999]; a certi intervalli vi saranno dei giorni in cui crescendo più e sempre più il numero delle estrazioni, la differenza tra le palle A e B estratte (confrontata con tutte le estrazioni) sarà minore e sempre minore; e in questo caso il rapporto fra le palle estratte A e B sempre più si avvicinerà all'eguaglianza. Ma il numero delle estrazioni può essere aumentato all'infinito; se ciò dunque avviene, la differenza tra le palle A e B estratte (fatto il confronto con tutte le estrazioni) sarà infinitamente piccola; e in questo caso le estrazioni delle palle A e B si adeguaglieranno fra loro. Ciò che doveva dimostrarsi.

SCOL. 1. *Chi avrà compreso la forza di questa dimostrazione capirà che essa conclude giustamente, finché si considera la proporzione geometrica [rapporto] confrontando tra loro le estrazioni delle palle di genere diverso; non invece giustamente quando si consideri la proporzione aritmetica [differenza] confrontando fra loro gli eccessi con cui le estrazioni delle palle di un genere sono superate dalle estrazioni delle palle dell'altro genere. Invero quando si fa crescere sempre più il numero delle estrazioni, gli eccessi di questo genere, se si confrontano tra loro, possono essere talvolta minori e talvolta maggiori; ma tuttavia stanno tra certi limiti; infatti continuando le estrazioni ogni giorno vi sono a certi intervalli alcuni giorni nei quali quegli eccessi non possono superare 1000 − 1; e perciò essi confrontati con tutte le estrazioni delle palle decrescono sempre più ed infine quasi svaniscono. Perciò può accadere che la differenza con cui il rapporto tra le palle estratte differisce dall'uguaglianza passato* *un intero anno sia maggiore di quella del primo mese ma tuttavia accade che quel rapporto si avvicini di più all'uguaglianza dopo tutto un anno che dopo il primo mese.*

COROL. 1. *Quello che si è dimostrato di due palle A, B può adattarsi a tutte le altre bianche e nere immesse come prima nell'urna. Da qui dunque si riconosce che, ripetendo più spesso le estrazioni, il rapporto che avranno tra loro le palle estratte sempre più si avvicinerà e finalmente adeguaglierà il rapporto di cui godono le palle da estrarre.*

p. 220 COROL. 2. *Dunque facilmente si comprende che in una lunga serie di estrazioni diventa più probabile del decuplo, del centuplo, del millecuplo ecc, e finalmente diventerà moralmente certo, che i numeri di volte in cui è estratta la palla bianca e quelli in cui è estratta la palla nera avranno tra loro un rapporto quanto si vuole vicino a quello che compete alle palle da estrarre, come si propose di dimostrare Jakob Bernoulli.*

COROL. 3. *Poiché nelle estrazioni quotidiane delle palle A, B talvolta accade che un giorno la somma delle estrazioni di A superi quella delle estrazioni di B e il giorno dopo la prima somma sia superata dalla seconda, avverrà anche che le stesse somme in qualche estrazione saranno eguali tra loro; e dopo che questo è accaduto una volta, se si continua il quotidiano esercizio, accadrà anche che di nuovo e di nuovo si presenti la stessa eventualità. Ma ciò che si dimostra delle due palle A, B si adatta alle restanti palle bianche e nere collocate, come prima, nell'urna; perciò il rapporto delle palle estratte non solo si avvicinerà ma anche eguaglierà quello delle palle da estrarre; e come ciò accade una volta di nuovo accadrà tante volte quante ecc.".*

Appendice A.2

p. 1 *Dimostrazione del Teorema Bernoulliano*

Poste nel Vaso le due Palle A, B ugualmente facili ad uscire, e cauatane una, e poi un'altra doppo esser rimessa la prima, io faccio molte estrazioni, e dico in primo luogo, che se alcune uolte uscirà la Palla A, altre uolte uscirà la Palla B; impercioche se, ogni uolta cauassi la Palla A, sarebbe segno che ad un effetto inalterabile una causa egualmente inalterabile risponderebbe, lo che non può stare con la perfetta indifferenza che fù supposta.

Raccolgo in due somme quante uolte sia uscita la Palla A e quante la B, e seguitando le estrazioni dico in secondo luogo, che ora sarà maggiore la prima somma, ed ora la seconda: In fatti se io trouassi che per quanto io uada multiplicando le estrazioni la somma di tutte quelle della Palla A superasse sempre la somma di tutte le altre della Palla B, ne seguirebbe che di quello effetto costante dourebbe assegnarsi una Causa egualmente costante, che altra non potrebbe essere fuori della maggior facilità della Palla A ad essere estratta, lo che è contro l'Ipotesi. Se prima dunque è maggiore la somma dell'estrazioni della Palla A, diuenterà poi maggiore la somma di quelle della Palla B. Ciò posto con un simile raciozinio si dimostra, che seguitando l'esercizio dourà diuentare di nuovo maggiore la somma dell'estrazioni della Palla A, e poi ritornare ancora maggiore la somma di quelle della Palla B; et essere maggiore una somma, e poi l'altra con questa alternatiua sino all'infinito.

Da questo ne segue, che la somma dell'estrazioni della Palla A nel principio potrà esser maggiore della somma di quelle della Palla B; ma seguitando l'esercizio douranno queste due somme diuentare eguali, e doppo questa egualità farsi maggiore

p. 2 la somma dell'estrazioni della Palla B sino che si rito[rni] ad un'altra egualità, per auer poi di nuovo da rito[rnar] maggiore la somma di quelle della Palla A, e così in seguito sino all'infinito.

Se così è io ne ricauo che sia per esser finito il numero dell'estrazioni da farsi trà una egualità e l'altra; e perciò concludo che sia per esser finito ancora ogni eccesso, col quale la somma dell'estrazioni d'una Palla è per superare doppo cadauna egualità la somma di quelle dell'altra.

Considerando dunque tutte le estrazioni in uniuersale, la proporzion d'egualità (che è quella nella quale i casi successi sono come i possibili) potrà receuere molto pregiudizio dal primo di questi eccessi: ma minor pregiudizio potrà riceuere dal secondo, e meno ancora dal terzo; e così in seguito sempre meno, sino che crescendo l'estrazioni all'infinito questo pregiudizio sarà nullo.

Si potrebbe auanzar la speculazione e dire, che il numero dell'estrazioni da farsi frà una egualità e l'altra è per esser maggiore ora quando l'eccesso è della Palla A; et ora quando è della Palla B. Poiché se fosse sempre maggiore nel primo Caso, a questo effetto costante [corrisponderebbe] una causa egualmente costante, cioè la maggior facilità dell'estrazione della Palla A, il che è contro l'Ipotesi come prima

p. 3 Il Teorema Bernoulliano è concepito in quella forma La proporzion delle Balle è come 3, 2, ouero come 30 : 20

Si facciano 25550 estrazioni la proporzion esatta sarebbe come 15330 : 10220.

Si propongono le due proporzioni seguenti

15330 + 511 : 10220 − 511, et 15330 − 511 : 10220 + 511 ouero le due 31 : 19, et 29, 21

e si dice che la probabilità che le Palle estratte siano frà queste proporzioni.

Si dice poi che Considerata poi la probabilità che la proporzione delle Palle estratte sia per essere di mezzo frà queste proporzioni, e la probabilità che la proporzione di queste Palle estratte sia per essere fuori di queste proporzioni, si dice che la prima probabilità sia più di mille uolte maggiore della seconda

E questo uuol dire che li Casi possibili ne quali le Palle estratte sono per essere in mezzo ~~alle~~ frà le sudette proporzioni, alli Casi possibili ne quali le dette Palle sono per essere fuori di dette proporzioni sono al meno come 1000 : 1

Appendice A.3

p. 1 *Sopra li Giochi detti di Fortuna*
Disertazione del Sig. Gio: Rizzetti

Nell'argomento del mio Libro della Scienza de' Giuochi u'è una Proposizione, che apre si può dire la strada à un mondo nuouo: In ludis fortuitis Ars coniectandi eò perducitur, ut indubitato calculo determinetur, quid infallibiliter Aleatores longa ludendi opera acquirere uel amittere possint. Questo impegno nel detto mio Libro è adempito con una compita dimostrazione; Ma perche questa non è dedotta dal calcolo delle combinazioni; per affermarla hò messo in opra anco questo; Et In fine hò cauato qualche altra conseguenza per far uedere quanto poco sia stata sin'ora intesa questa materia: E tutto ad effetto di promuouere con più efficacia il commune disinganno.

Tutto il Misterio dipende dal seguente Teorema: Siano molti Casi possibili, tutti d'un'istessa facilità, ma però alcuni d'una spezie, et altri d'un'altra: se di questi ne succede un gran numero, u'è una morale certezza, che li Casi successi siano per essere esattamente, ò prossimam.^{te} frà loro nella medesima proporzione, nella quale erano li possibili: Siano per esempio in un'urna due palle a,b, ogn'una egualm:^{te} facile ad essere estratta: In ogni estrazione se ne caui una, e doppo l'estrazione si rimetta: Io dico, che repplicate l'estrazioni in un gran numero, u'è una morale certezza, che le palle estratte siano per essere frà loro nella medesima proporzione d'egualità (ò esatta ò prossima), che aueano le palle da estrarsi.

Assumo questa Ipotesi semplicissima; perche se in questa dimostro uero il Teorema, potrò facilm:^{te} applicare la Demostrazione alle altre Ipotesi più composte; ma per ottenere l'intento, bisogna ch'io premetta il seguente Problema.

Siano nell'Vrna le due Palle a,b come sopra : Si facciano ogni giorno due estrazioni, e si raccolga ogni giorno in due somme, in una tutte le Palle a, e nell'altra tutte le palle b, che saranno estratte: Trouar la probabilità, con la qual può succedere, che in un numero di giorni n la somma delle Palle a superi ogni giorno la somma delle palle b.

p. 2 Per lauorarne la Soluzione considero prima, che quatro sono le maniere, in una delle quali possono uscire le palle ogni giorno aa,ab,ba,bb. Uscite il primo giorno, per esempio, nella maniera aa, questa si può accompagnare il secondo giorno con ogn'una delle quatro sudette; onde il secondo giorno può compirsi uno delli quatro casi aa,aa | aa,ab | aa,ba | aa,bb. E perche il secondo[1] giorno possono uscire le Palle in ognuna delle altre

[1] Ci sembra si tratti di una svista di Rizzetti, essendo più coerente intendere *primo*.

maniere ab,ba,bb; potendosi pure ogn'una di queste accompagnare con ogn'una delle quatro maniere dette di sopra, ne segue, che $4 \cdot 4$ è il numero di casi, uno de quali può compirsi il secondo giorno. Con un simile ratiozinio si capisce, che il numero de casi, uno de quali può compirsi il terzo giorno è $4 \cdot 4 \cdot 4$. e finalmente che il numero de casi uno de quali può compirsi nel numero de' giorni n è 4^n.

Fatto il primo passo, resta da ritrouarsi quanti di questi Casi siano fauoreuoli al successo proposto. E però distinguo que' fauoreuoli, che sono senza b, quelli che hanno un solo b; quelli che hanno due b, e così in seguito.

Li Casi fauoreuoli, che sono senza b, cominciano à nascere il primo giorno; e in qual si sia numero de' giorni n non possono essere ne più ne meno d'uno.

Li Casi fauoreuoli, che hanno un solo b, cominciano à nascere il secondo giorno: Vna prima parte di essi è prodotta dal caso, che, essendo nel giorno antecedente fauoreuole, è senza b, accompagnandosi questo caso con uno delli due ab, ba, e perciò multiplicandosi per 2. Un'altra seconda et ultima parte di essi casi fauoreuoli è prodotta dalli casi, che, essendo nel giorno antecedente fauoreuoli, hanno un solo b, accompagnandosi questi col caso aa, e perciò multiplicandosi per 1.

Li Casi fauoreuoli, che hanno due b, cominciano a nascere il terzo giorno: Vna prima parte di questi è prodotta dal Caso, che, essendo nel giorno antecedente fauoreuole, e senza b, accompagnandosi questo col Caso bb, e perciò multiplicandosi per 1. Un'altra seconda parte di questi Casi fauoreuoli è prodotta dalli Casi, che essendo nel giorno antecedente fauoreuoli, hanno un solo b, accompagnandosi questi con uno delli due Casi ab, ba e perciò multiplicandosi per 2. Finalm.[te] una terza et ultima parte di essi casi fauoreuoli è prodotta dalli Casi, che essendo nel giorno antecedente fauoreuoli, hanno due b, accompagnandosi questi
p. 3 col Caso aa, e perciò multiplicandosi per 1.

Ogn'uno può di questo ricauar da per se la dimostrazione, e con un metodo simile trouar li Casi, che hanno tre b, e così gl'altri, che fanno bisogno per formar le seguenti serie, e quante altre che uollesse per qual si sia numero di giorni n.

$$1$$

$$1|2$$

$$1|2 + 2|1 + 4$$

$$1|2 + 4|1 + 8 + 5|4 + 10$$

La prima serie appartiene ad $n = 1$, la seconda ad $n = 2$, e così in seguito. E perche la probabilità del successo proposto consiste in quella parte di tutti i Casi possibili, che nel numero di giorni n è propria de Casi fauoreuoli al detto successo; perciò se $n = 1$, la detta probabilità è $\frac{1}{4}$; se $n = 2$, ella

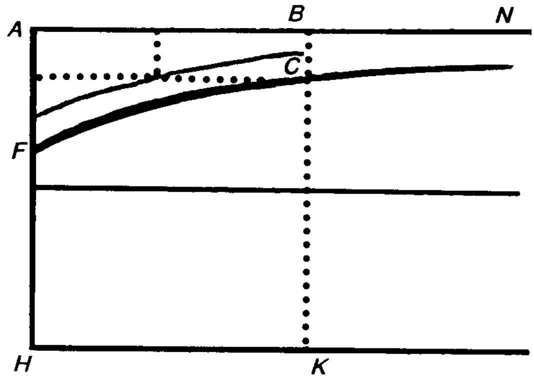

FIGURA 1

è $\frac{1+2}{4\cdot 4}$; se n = 3, ella è $\frac{1+2+2+1+4}{4\cdot 4\cdot 4}$, e così in seguito, il che era da ritrouarsi.

Da questa soluzione si cauano tutte le conseguenze, che occorrono al nostro bisogno; ma prima conuien premettere un'osseruazione. Diuisa ogn'una delle serie sopra descritte in caselle, ouero termini, indica il primo termine li casi, che sono senza b, il secondo termine quelli, che hanno un b, il terzo termine quelli, che hanno due b, e così in seguito.

Ciò posto osseruo, che per produr il numero di tutti i Casi di una serie, si multiplica per 4 ogni termine della serie antecedente, eccetto l'ultimo termine, che si multiplica solo per 3. Così per produr il numero di tutti li Casi della quarta serie 1|2 + 4|1 + 8 + 5|4 + 10, si multiplicano per 4 i due primi termini della terza serie 1|2 + 2, e per 3 l'ultimo termine 1 + 4.

Questa osseruazione, della quale ogn'uno può da per se ricauar la dimonstrazione, è si può dire la chiaue di tutto il nostro negozio. In fatti se ne ricaua, che li Casi fauoreuoli al successo proposto crescono ogni giorno meno del quadruplo; Ma per le cose premesse si sà, che tutti li casi possibili crescono ogni giorno esattam:[te] il quadruplo; dunque la parte di tutti questi Casi possibili, che appartiene alli detti casi fauoreuoli (cioè la probabilità del successo proposto) si uà sempre diminuendo di mano in mano, che uà crescendo il numero di giorni n.

Posta dunque la certezza assoluta H A, sia A F eguale ad $\frac{1}{4}$ A H, uoglio dire eguale alla probabilità, che nel primo giorno la somma delle palle a superi quella

p. 4 delle palle b: Tirata la retta AB perpendicolare ad AH, esprima AB un numero di giorni n maggiore dell'unità; E tirata la retta BC parallela ad AH, sia questa BC la probabilità, che in detto numero di giorni n la somma delle palle a superi ogni giorno la somma delle palle b: Io posso trouare delli punti C quanti mi piace, ed inferire che per essi passerà la Curua FC, scala delle probabilità di sopra proposte. Non importa auere la descrizione di questa Curua in tutta la sua estenzione; basta conoscere il suo andamento, e sapere per le cose premesse, che ella hà l'Asintoto AB, al quale sempre più si auuicina; quanto più cresce il numero di giorni n. Stabilito questo principal fondamento uado di passo in passo per le altre conseguenze alla meta. Tirata la HK parallela ad AB, e prorogata la BC in K, ricauo il numero di giorni n per arriuare ad una tal quantità determinata AB, che la probabilità BC fauoreuole al successo proposto sia per essere $\frac{1}{1000}$ della certezza totale BK, e in conseguenza la probabilità CK contraria al detto successo sia per essere $\frac{999}{1000}$ della certezza totale.

Posto dunque che sia certezza morale questa probabilità $\frac{999}{1000}$, sarà moralm:^{te} certo, che il numero de' giorni n sia per essere minore della quantità determinata AB + 1. Chi uolesse una certezza ancora maggiore, per esempio quella espressa per $\frac{9999}{10000}$, à questa ui corrisponderebbe un numero di giorni n espresso per AN maggiore di AB, e sarebbe ancora più certo, che questo numero de' giorni n sia per essere minore dell'altra quantità determinata AN + 1.

Dunque ne segue esserui una morale certezza, qualunque ella si uoglia, che se in un giorno la somma delle palle a supera quella delle palle b, in un'altro giorno la somma delle palle b sia per superare quella delle palle a.

E da ciò si raccoglie esserui una morale certezza, in primo luogo che queste somme siano per essere frà loro in qualche giorno eguali, e in un'altro giorno ineguali; e in secondo luogo che questo sia per succedere più uolte e sempre più uolte, quanto più lungo è il quotidiano esercizio. Ma è moralm:^{te} certo, che il detto numero de' giorni n sia per essere minore d'una quantità determinata, per esempio, AB + 1; sarà dunque moralm:^{te} certo anco questo, che, ogni uolta le dette due
p. 5 somme sono ineguali, la loro differenza sia per essere minore d'un'altra quantità determinata, ch'io chiamo P.

Questa quantità determinata P è relatiua à tutte le Palle estratte nel numero de' Giorni AB + 1; il che indicato, ricauo dalle cose sudette esserui la morale certezza, che le due somme, quella delle palle a, e quella delle palle b, siano bensì per essere nel quotidiano esercizio ora eguali et ora ineguali; ma nel caso della loro ineguaglianza sia per essere anco la loro differenza sempre minore della detta quantità determinata P.

Ma è pur moralm:te certo, che dall'eguaglianza delle due somme si passi all'ineguaglianza più uolte e sempre più uolte, quanto è più lungo il quotidiano esercizio; Crescendo dunque in questo esercizio il numero delle estrazioni, sarà moralm:te certo ancora questo, che la quantità determinata P ne casi dell'ineguaglianza sia per essere più picciola, e sempre più picciola rispetto al numero di tutte le palle estratte: E che in conseguenza le due somme siano per essere sempre più uicine ad eguagliarsi.

Potrei aggiongere, che se il numero delle Palle estratte fosse infinito, la detta certezza diuenterebbe assoluta, e la quantità P respettiuam:te inassignabile. Onde in quel caso ui sarebbe assolutam:te frà le dette due somme ò l'eguaglianza, ò la adequazione. Ma ciò poco importa, giache questo infinito può esser da noi proferito, ma non ottenuto. Basta esserui per le cose dette di sopra in un numero d'estrazioni finito e determinato se non una certezza assoluta, almeno una tal certezza morale, qual ella si uuole, che trà le dette due somme ui sia per essere una esatta egualità, ouero una prossima adequazione.

Se bene alle due palle a, b aggiongiamo la terza palla c, purche mettiamo in conto le sole estrazioni delle due palle a, b, senza auer alcuna considerazione alle altre della palla c, auremo ad ogni modo la morale certezza, che nel lungo esercizio la somma delle palle a sia per essere ò esattam:te o prossimam:te eguale alla somma delle palle b.

Ma se mettiamo in conto la sola estrazione delle due palle a, c senza auer alcuna considerazione alle altre della palla b, auremo l'istessa certezza morale, che nella lunga operazione la somma delle palle a sia per essere esattamente ò prossimam:te eguale alla somma delle palle c. Se dunque mettiamo in conto tutte le estrazioni delle tre palle a, b, c saremo moralm:te certi, che nel lungo esercizio la somma delle palle a
p. 6 sia per essere esattam:te ò prossimam:te eguale tanto à quella delle palle b quanto all'altra delle palle c.

E se mutato il nome della palla c, la chiameremo anc'essa a, auremo pur una morale certezza, che repplicate alla lunga le estrazioni, la somma delle palle a sia per essere esattam:te ò prossimam:te doppia dell'altra delle palle b.

Aggiunte finalm:te quante altre Palle uogliamo, potremo applicare il medesimo discorso, e generalm.te concludere con morale certezza, che in un gran numero d'estrazioni la proporzione delle palle estratte sia per essere esattam.te ò prossimam.te uguale alla proporzione delle palle da estrarsi; E in un gran numero de' Casi successi sia in conseguenza per essere la proporzione di questi esattam:te ò prossimam:te eguale a quella de casi possibili, il che era da dimostrarsi.

Hò detto à bel principio, che da questo Teorema dipende la proposizione nell'argomento del sopracitato mio Libro indicato, e per altra stradda in esso Libro dimostrata: In ludis fortuitis Ars coniectandi eò perducitur, ut indubitato calculo determinetur, quid infallibiliter Aleatores longa ludendi opera acquirere uel amittere possint. Ora dunque che il detto Teorema è fuor d'ogni dubbio, potrò cauarne la conclusione promessa.

Siano in un gioco molti casi possibili, una parte de quali sia fauoreuole ad un giocatore, e l'altra parte in fauore dell'altro: Se in un numero de giuochi grande bensi, ma determinato u'è la morale certezza, che succedono i detti Casi nella proporzione esatta o prossima, nella quale erano possibili auanti il principio del gioco; ne succederanno tanti à fauor del primo giocatore, e tanti à fauor del secondo (ò esattam:^{te} ò prossimam:^{te}), quanti conuengono alla detta proporzione. Però conosciuta questa, come pure quel che da ogn'uno si gioca, si potrà sapere con morale certezza, quanto sia nel mede.mo numero de giuochi per guadagnare esattam:^{te} ò prossimam:^{te} un giocatore dall'altro.

Coll'uso di questa Teoria hò fatto più uolte stupire gl'Amici, che erano meco nell'ozio della Villa. Si istituisca il gioco della Bassetta in molti banchi, à quali si distribuiuano 15000 segni, una parte per cadaun banco. Per espedir presto l'esperienza e uniformarla più che fosse possibile al praticato, si mettauano tre segni sopra ogn'uno delli tredici punti delle carte; e si replicaua la Posta
p. 7 (sempre di tre segni) sino alla terza e quarta uolta, e sino che usciuano tutte le Carte: Li segni che guadagnaua il Banchiere in ogni banco si metteuano da una parte, e quelli che guadagnaua il Collusore da un'altra: Incaminato il gioco con le solite formalità, io prediceuo, che delli 15000 segni ne sarebbero entrati esattam:^{te} ò prossimam:^{te} 8000 nella parte delli Banchieri, e 7000 in quella delli Collusori. Vedendo dunque gl'Amici la mia predizione uerificata, restauano tutti merauigliati: e poi uedendo, che per quante uolte si repplicaua l'esperienza, il successo era sempre l'istesso, si abbandonauano talm:^{te} alla merauiglia, che alcun di loro sospettaua di qualche illecito patto.

Tutto il Misterio consisteua nella cognizione del uantaggio, che hà il Banchiere sopra il Collusore: Preso questo uantaggio nel medio, che egli hà ne diuersi giochi soliti à praticarsi in quello della Bassetta; m'era noto, che il Banchiere uno, ò più insieme nel giro della detta esperienza douea con certezza morale guadagnare una somma esatta ò prossima di $3\,\frac{1}{3}$ per 100 di tutti li segni, che entrauano in gioco. E però delli 15000 segni, che ui entrauano, m'era pur anco noto, che ne dovea guadagnare una somma esatta ò prossima di 500, e che in conseguenza ne douea esattam:^{te} ò prossimam:^{te} acquistare 1000 di più di quelli, che acquistaua il Collusore. Confermata questa Teoria da una tale esperienza, passiamo à cauare quelle altre conseguenze, che seruono à metter in chiaro di bene in meglio l'indole de giuochi. Posto che nel numero di 5000 giuochi di Bassetta abbia il Banchiere la certezza morale di uincere esattam:^{te} ò prossimam:^{te}

$3\frac{1}{3}$ per 100 di tutto quello che si gioca; se li giuochi saranno per esempio 3000, cioè un numero minore del primo, aurà l'istessa certezza di uincere, non però li $3\frac{1}{3}$ per 100 detti di sopra, ma qualche altra somma minore.

Da ciò si ricaua potersi istituir il gioco della Bassetta in un'altra maniera assai delusoria, che si deue manifestare, acciò niuno resti ingannato. Abbia il Banchiere 300 Scudi, et altrettanti il Collusore: Ogn'uno unisca alli suoi scudi quelli, che di uolta in uolta uà guadagnando: Le Poste siano ogn'una di tre Scudi; con un patto, che se il Collusore guadagna li 300 scudi del Banchiere, siano tutti suoi, e se il Banchiere guadagna li 300 Scudi del Collusore, abbia quello da restituire à questo 250.

p. 8 Io proposi una uolta questo gioco ad un Dottiss: mio amico, e lui rispose, che se bene non gioca, ad ogni modo essendoui il Banchiere, uenderebbe sin le sue Vesti per giocare. In fatti chi non farebbe in questo gioco la parte del Collusore ? E pure replicata nell'ozio della Villa moltissime uolte l'esperienza, il Banchiere fù sempre quello, che uinse. Onde si confermò nouamente esserui di questo successo una tale certezza che il Banchiere potrebbe restituir al Collusore in questo gioco non solo li 250 Scudi detti di sopra, ma potrebb'anco restituirne 299, e giocare senza timor della perdita.

Doppo una tal conferma della uerità di sopra dimonstrata io la discorro così: Se in un solo gioco di Bassetta hà il Banchiere la sola probabilità di uincere, che è $\frac{31}{60}$ della certezza assoluta (parlo della probabilità, che egli hà in un solo de giuochi medij trà gl'altri soliti à praticarsi in quello della Bassetta); e se in 3000 di questi giuochi hà l'istesso Banchiere una tall'altra probabilità di uincere, che si può dire certezza morale; à questa certezza non già prouiene in un salto; ma bensì passando per tutti gl'altri gradi della probabilità.

Osseruasi dunque quanto poco sia stata sin'ora intesa la Scienza de' Giuochi: Crederono li Sig:[ri] Ughenio, Bernoulli, Montmorzio, e Moeure d'auerla in alcuni giuochi esaurita: Trouarono cò suoi calcoli le probabilità, che hà un giocatore di uincere in un gioco mal compartito, come è quello della Bassetta, e perciò stimarono d'auere in esso toccato il segno. In uero così sarebbe successo, se la detta probabilità restasse sempre la stessa in tutte le reppliche del mede.mo gioco. Ma perche in queste repliche si muta, non hanno fatto altro questi illustri Soggetti che un solo passo di quelli innumerabili, che restano ancora da farsi.

Io lascio la cura à gl'altri di trouar le probabilità, che hanno i Giocatori di uincere in cadaun numero di questi giuochi. A me basta sapere, che (rispetto a quelli della Bassetta) arriuato questo numero alla quantità di 3000 ad una certa quantità, il Banchiere hà la morale certezza di uincere ò poco ò troppo; e che arriuato il detto numero ad un'altra quantità maggiore di 5000 il detto Banchiere hà pure la certezza morale di uincere $3\frac{1}{3}$ per 100 di tutto quello che si gioca.

D'una sola difficoltà mi resta da dire, cioè dell'ineguaglianza delle Poste, che può alterare il successo conueniente à questa Teoria: E per dar anco in questo la douuta soddisfazione, prenderò la risposta dall'accennato mio Libro: Ita lucrum respondet Oeconomo, si quid in uno ludo
p. 9 depositum est, idem quoque deponatur in altero; At si deposita sunt in alijs ludis maiora, in alijs minora, exitus lucri querendus non est in omnibus ludis coniunctim, sed in illis singillatim, qui ad deposita eiusdem magnitudinis pertinent. Etenim potest Oeconomus sua frui prerogatiua in quibusdam ludis pertinentibus ad deposita unius magnitudinis, et nondum in alijs; unde oriatur in uniuersis iactura. At si ludi ad unamquamque depositi magnitudinem pertinentes ad eum usque numerum, qui conuenit, augentur, lucrum poterit in uniuersis quoque adimpleri.

Trattandosi dunque del gioco della Bassetta, può imparar il Banchiere à star lontano da quelle Poste eccedenti, che rare uolte si uedono, e andar in traccia di quelle altre più moderate, che compariscono spesso, acciò le prime non mettano in contingenza quell'utile, che può cogliere con moral sicurezza dalle seconde. Se in questa forma si regola, egl'è certo, giocando alla lunga, di approfittarsi per appunto come farebbe, se attendesse à cambiar monete col uantaggio di $3\frac{1}{3}$ per 100.

Se poi si douesse permettere l'ineguaglianza delle Poste con maggior libertà, bisognerebbe usare un'altro artifizio. Ogni posta di qual si sia quantità, (escluse le trascendenti) può multiplicarsi in molti banchi à qual segno, che non si può fare in un solo. Se dunque in molti Banchi si interesserà il giocatore, riceuerà dalla detta multiplicazione il beneficio di assicurar quel uantaggio, che in un solo Banco sarebbe incerto.

E la ragione ne è manifesta, poiché s'impara dalle cose dette, che frequentato il gioco della Bassetta in molti banchi, e per molto tempo, l'ineguaglianza delle Poste può bensì cagionare diuersità di effetti separatam:^{te} in un Banchiere, e nell'altro, come pure in un Collusore e nell'altro. Ma presi tutti insieme, si uede bene, che multiplicata abastanza ogni Posta di qual si sia quantità, dal Consorzio di tutti i Collusori si paga al Consorzio de Banchieri il certo, e sicuro censo di $3\frac{1}{3}$ per 100, poco più ò poco meno, di tutto quel che si gioca.

Meritano compatimento sin'ora quei giocatori di Bassetta, che ignari di queste leggi attribuiscono alla sola fortuna tutto ciò, che in detto gioco
p. 10 succede, e in conseguenza stimano poco d'essere d'un consorzio ò dell'altro. Ma adesso che ne sono auertiti, sarebbero molto buoni, se entrassero nel Consorzio de Collusori più tosto che in quello de Banchieri.

Le altre conseguenze, che appartengono tanto al gioco della Bassetta, come à tutti i giuochi generalm:te, sono registrate in detto mio Libro, il che basta senza dir d'auantaggio che si uende a Venezia dal Sig: Pauino à S. Zulian ristampato con questa, et altre aggionte.[2]

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo i Referees e la prof. Karen Parshall, Managing Editor di *Historia Mathematica,* per gli utili suggerimenti ed i commenti alla prima stesura di questo lavoro. Esprimiamo la nostra più sentita riconoscenza al prof. Giovanni Pistone, dell'Università di Torino, per l'aiuto, i preziosi suggerimenti e le idee che ci ha dato durante la stesura del lavoro, ed un particolare ringraziamento alla signorina Monica Rossi per i suoi validi contributi di consulenza linguistica su testi scritti in tedesco.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Belcastro, G. Fenaroli, e A. C. Garibaldi, Due dimostrazioni del teorema di Jakob Bernoulli, relativo al calcolo delle probabilità, effettuate da Giovanni Rizzetti, negli *Atti del Congresso: "Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza," Viareggio, 8–13 Gennaio 1990, Volume I—Filosofia della scienza e fondamenti della probabilità e della statistica,* a cura di Domenico Costantini e Maria Carla Galavotti, Bologna: CLUEB, 1991, pp. 117–122.
2. D. Bernoulli, *Exercitationes quaedam mathematicae,* Venetiis: Dominicum Lovisam, 1724.
3. J. Bernoulli, *Ars conjectandi opus posthumum,* Basileae: Thurnisiorum Fratrum, 1713.
4. J. L. F. Bertrand, *Calcul des probabilités,* Paris: Gauthier–Villars, 1889.
5. M. Brusatin, Illuminismo e architettura nel '700 veneto, nel *Catalogo della mostra, Cassa di Risparmio della Marca Trivigiana, Grafiche Giorgio Paroni, Resana, (TV),* 1969, pp. 30–38 e 125–128.
6. M. Brusatin, *Venezia nel '700, Stato, Architettura, Territorio,* Torino: Einaudi, 1980.
7. P. Casini, *Newton e la coscienza europea,* Bologna: Il Mulino, 1983.
8. G. Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità,* vol. 1, Bologna: Zanichelli, 1957.
9. A. De Moivre, De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **329** (1711), 213–264.
10. I. Ekeland, *Au hasard,* Paris: Édition du Seuil, 1991. Edizione italiana *A caso. La sorte, la scienza e il mondo,* Torino: Bollati Boringhieri, 1992.
11. D. M. Federici, *Memorie trevigiane sulle opere di disegno,* Venezia, 1803; ristampa Bologna: Forni Editore, 1978 (2 volumi in uno), pp. 141–147.
12. A. Hald, *A History of Probability, Statistics, and Their Applications before 1750,* New York: Wiley, 1990.
13. P. R. de Montmort, *Essai d'analyse sur les jeux de hazards,* Paris: Jombert, 1714.
14. G. Piaia and M. T. Soppelsa, Riccati (I) e la cultura della Marca nel settecento europeo, *Atti del Convegno internazionale di studio, Castelfranco Veneto, 5–6 aprile 1990,* Biblioteca di Nuncius, 5, Firenze: Olschki, 1992.
15. L. Pepe, Il calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII. *Bollettino di storia delle scienze matematiche* **1** (2) (1981), 43–101.
16. P. Riccardi, Biblioteca matematica italiana, parte prima, vol. II, *Società Tipografica Modenese, Antica Tipografia Soliani, Modena,* (1876), Col. 382–383.
17. J. Riccati, *Opere,* Lucca: Jacopo Giusti, 1762, 2:164–196.

---

[2] Non siamo ancora riusciti a procurarci questa ristampa del libro di Rizzetti, ignota ai repertori bibliografici consultati. Di essa daremo notizia qualora fosse possibile.

18. G. Rizzetti, *Ludorum scientia publico beneficio illustrata,* Venetiis: Aloysium Pavinum, 1725.

19. G. Rizzetti, *Ludorum Scientia, sive Artis conjectandi elementa ad alias applicata,*[3] Acta Eruditorum Lipsiae **9** (1729), Suppl. Sect. V, 215–229, e **9** (1729), Suppl. Sect. VII, 295–307.

20. I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace,* Cambridge/London: Macmillan & Co., 1865.

21. B. L. van der Waerden, *Die Werke von Jakob Bernoulli,* Basel: Birkhäuser Verlag, 1975, 107–286.

22. F. Zanella, I Rizzetti tra XVIII e XIX secolo: Giovanni architetto e contestatore di Newton, Luigi pioniere del volo, in *"Il Veneto e Treviso tra Settecento e Ottocento" a cura dell'Istituto per la Storia del Risorgimento Italiano, Comitato Locale, X-ciclo di Conferenze, Commune di Treviso, Treviso, novembre 1989–aprile 1990,* 1989–1990, pp. 251–264.

[3] Evidentemente deve leggersi "... ad aleas applicata." Peraltro l'errore di stampa negli *Acta* è ripetuto anche nella successiva edizione *Opuscola omnia Actis Erud. Lips. inserta* dove il testo di Rizzetti trovasi al vol. 7° (Venetiis 1746) alle pp. 48–60 e 76–86.